

2.....	1
DECISIONES BAJO CERTEZA: VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO	1
2.1 INTRODUCCIÓN.....	1
2.2 EL CONCEPTO DE EQUIVALENCIA	1
2.3 INTERÉS Y TASAS DE INTERÉS	3
COMPONENTES DE LA TASA DE INTERÉS	5
LA INFLACIÓN	5
EL RIESGO	6
TASA DE INTERÉS REAL	7
2.4 DIAGRAMA DE FLUJO DE CAJA	8
2.5 TASA DE INTERÉS COMPUESTO	10
2.6 FÓRMULAS DE INTERÉS O FACTORES DE CONVERSIÓN	11
2.7 RESUMEN DE FUNCIONES DE EXCEL.....	12
2.8 PARA RECORDAR	12
2.9 MÉTODOS DE DECISIÓN	12
VALOR PRESENTE (VP) Y VALOR PRESENTE NETO (VPN).....	13
REGLA DE DECISIÓN PARA EL VALOR PRESENTE NETO (VPN).....	20
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL VPN	21
TASA INTERNA DE RENTABILIDAD (TIR).....	23
REGLA DE DECISIÓN PARA EL MÉTODO DE LA TASA INTERNA DE RENTABILIDAD	27
2.10 RESUMEN	28
2.11 REFERENCIAS	28

Decisiones bajo certeza: Valor del dinero en el tiempo

El tiempo es un gran maestro, pero infortunadamente mata a todos sus alumnos.

Héctor Berlioz

En estos temas la única certeza es que nada es cierto.

Plinio, el viejo

2.1 Introducción

En este capítulo se estudiará el problema que se plantea el que decide al enfrentarse con flujos de dinero que ocurren en diferentes períodos. Para cualquier persona es muy claro, intuitivamente, que el individuo tiene preferencia por consumir ahora y no posponer ese consumo; también es muy claro para cualquier individuo que se prefiere tener una suma de dinero hoy y no tener que esperar un cierto tiempo para poder contar con la misma cantidad de dinero ofrecida para hoy. Sobre esta base se desarrolla lo que se conoce como Matemáticas Financieras, que bien podría llamarse Aritmética Financiera. Para el manejo de esta herramienta sólo es necesario aplicar las operaciones básicas de la aritmética, algo de sentido común y cierta capacidad de análisis de situaciones.

2.2 El concepto de equivalencia

Uno de los fundamentos de la economía es la psicología. El comportamiento del individuo en relación con sus decisiones, su comportamiento de consumo y ahorro, es el elemento básico del estudio de la ciencia económica. Por ejemplo, los individuos obtienen satisfacción al consumir —por consumir lo más pronto posible—, y pueden cambiar consumo actual por consumo futuro, siempre que la utilidad o satisfacción que obtengan de este último sea al menos equivalente, no

necesariamente igual, a la del consumo actual. Este es uno de los temas fundamentales de la microeconomía.

La gente tiene una preferencia subjetiva a consumir hoy, por lo tanto, la postergación de un consumo actual implica la exigencia de una mayor cantidad de consumo futuro, para alcanzar una satisfacción equivalente. Cuando esta necesidad compulsiva de consumir se inhibe, se produce una insatisfacción que de alguna manera debe compensarse; esa compensación la recibe el individuo al disponer de mayor capacidad de consumo en el futuro. Con ello se llega fácilmente a la conclusión de que ya no se pueden sumar unidades monetarias de diferentes períodos de tiempo, porque no son iguales.

Cuando se introduce el concepto de inversión, o sea que un individuo ahorra o invierte \$1 para obtener más de \$1 al final de un período, se encuentra que invertirá hasta cuando el beneficio recibido por el excedente que le paguen por su dinero sea menor que la que el individuo asigna al sacrificio de consumo actual, o sea, a la tasa a la cual está dispuesto a cambiar consumo actual por consumo futuro.

Un modelo matemático que representa estas ideas consiste en la siguiente ecuación:

$$F = P + \text{compensación por aplazar consumo} \quad (2.1)$$

donde:

F = Suma futura poseída al final de n períodos.

P = Suma de capital colocado en el período 0.

Este modelo y los párrafos anteriores permiten introducir un concepto de mucha importancia: el *concepto de equivalencia*. Se dice que dos sumas son equivalentes, aunque no iguales, cuando a la persona le es indiferente recibir una suma de dinero hoy (P) y recibir otra diferente (F) mayor al cabo de un (1) período de tiempo. En microeconomía esta situación se mide con la tasa marginal de sustitución en el consumo. Esta relación es la base de todo lo que se conoce como matemáticas financieras.

Esta diferencia entre P y F responde por el *valor* que le asigna el individuo al sacrificio de consumo actual y al riesgo que percibe y asume al posponer el ingreso.

El concepto de equivalencia implica que el valor del dinero depende del momento en que se considere, esto es, que un peso hoy, es diferente a un peso dentro de un mes o dentro de un año. Más simple, un peso hoy vale más que un peso futuro.

2.3 Interés y tasas de interés

Al hablar de equivalencia se ha involucrado —en forma implícita— un monto de interés que se puede representar como una fracción de la suma en el período inicial (hoy) o como un porcentaje $i\%$, en general, diferente de cero. El concepto de interés, sin ser intuitivo, está profundamente arraigado en la mentalidad de quienes viven en un sistema capitalista.

Cuando se recibe dinero en calidad de préstamo, es *justo* pagar una suma adicional al devolverlo. Esa suma adicional es el provecho, ganancia, utilidad o lucro producido por el capital. Se puede considerar como el precio que se paga por el uso del dinero de otra persona.

En otras palabras, *el interés I es la compensación que reciben los individuos, firmas o personas naturales, por el sacrificio en que incurren al ahorrar una suma P .* El mercado le brinda al individuo (persona o firma) la posibilidad de invertir o la de recibir en préstamo; el hecho de que existan oportunidades de inversión o de financiación, hace que exista el interés. Este fenómeno económico real *se mide con la tasa de interés i , la cual, a su vez, se representa por un porcentaje.* Este porcentaje se calcula dividiendo el interés I recibido o pagado por período, por el monto inicial P , de modo que la tasa de interés será:

$$i = \frac{I}{P} \tag{2.2}$$

En otras palabras, el interés es la compensación que reciben los individuos, firmas o personas naturales por el sacrificio en que incurren al ahorrar.

Retomando el concepto de equivalencia, el modelo

$F = P + \text{compensación por aplazar consumo}$

que lo expresa se puede redefinir así:

$$F = P + Pi = P(1+i) \quad (2.3)$$

y se puede generalizar para cualquier número de períodos n , así:

$$F = P(1+i)^n \quad (2.4)$$

o también:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} \quad (2.5)$$

Esta expresión es fundamental en el análisis de los movimientos de dinero. A partir de esta fórmula se deducen todas las fórmulas de interés que se utilizan para hallar la equivalencia entre sumas de dinero en el tiempo; en realidad, no se necesitaría conocer más que esto. Las fórmulas ya mencionadas son derivaciones de la anterior y su uso y deducción son nada más que buenos ejercicios de aritmética. Se dice, entonces, que P es el valor descontado o valor presente de una suma futura F .

La tasa de interés que establece esta equivalencia se llama tasa de descuento (*discount rate* o *hurdle rate*, en inglés) o tasa de rentabilidad mínima aceptable; algunos autores prefieren utilizar el nombre de costo o tasa de oportunidad; más adelante se estudia este punto con detalle y se define la forma de determinarla.

La tasa de descuento no debe confundirse con el porcentaje de descuento que puede recibir quien compra un producto o quien compra un título valor (bonos, por ejemplo) a descuento. La tasa de descuento se determina considerando el costo del dinero para el que decide; esto es, lo que paga por recibir dinero prestado, o lo que deja de ganar por el dinero que tiene. A este último costo se le denomina costo de oportunidad y aquí se utilizará el nombre de tasa de descuento. Esta tasa de interés es la que se utiliza para hacer cálculos que permiten evaluar la bondad de una inversión.

Ejemplo 1

Alguien entrega hoy una suma P por valor de \$1.000 a un tercero y al cabo de un año (n) éste le devuelve un valor F de \$1.300. Si esta persona no intentaba ganar dinero con el amigo, pero tampoco perder, porque la tenía depositada en una cuenta de ahorros que producía 30%, se dice que es indiferente entre \$1.000 hoy y \$1.300 después de un año. O sea que estas dos sumas de dinero son equivalentes, porque al año se han recibido $1.000 + i \times 1.000$, es decir, \$1.300, dado que la tasa de interés $i\%$ a la cual prestó, fue del 30%.

Componentes de la tasa de interés

A principios del siglo XX Irving Fisher propuso lo que se conoce como efecto Fisher o relación de Fisher. Propuso que las tasas de interés seguían la tendencia de la inflación, de manera que había una interrelación entre la tasa de interés real y la inflación. Aquí proponemos una extensión de ese teorema e incluimos la prima de riesgo.

Se puede considerar que la magnitud de la tasa de interés corriente, o sea la que se encuentra en el mercado (la que usan los bancos o cualquier otra entidad financiera), tiene tres componentes o causas: la inflación, el riesgo y la tasa real de interés.

La inflación

El efecto de la *inflación*, más precisamente las expectativas de inflación, es propio de la economía donde se presenta el problema de decidir entre alternativas de inversión. La inflación es una medida del aumento del nivel general de precios, medido a través de la canasta familiar; su efecto se nota en la pérdida del poder adquisitivo de la moneda. Esto significa que cuando hay inflación, cada vez se puede comprar menos con la misma cantidad de dinero. A mayor inflación, mayor tasa de interés.

En Colombia, el efecto de la inflación como componente de las tasas de interés se reconocía con la corrección monetaria de la Unidad de Poder Adquisitivo Constante, UPAC, hasta 1999. A partir de 2000 esto se reconoce con la Unidad de Valor Real UVR. Una rápida exploración de los valores

de las tasas de interés libres de riesgo del mercado de algunos países, en la tabla 2.1, muestra la influencia de la inflación sobre la tasa de interés.

TABLA 2.1 Tasas de inflación e interés de algunos países 2001

PAÍS	INTERÉS %	INFLACIÓN
Argentina	10,44%	0,20%
Australia	4,96%	3,60%
Brasil	16,55%	7,70%
Canadá	4,22%	2,40%
Chile	7,26%	3,70%
Colombia	12,64%	7,90%
Comunidad Europea Promedio	4,45%	2,30%
Dinamarca	5,05%	2,30%
Filipinas	10,81%	6,50%
Japón	0,01%	-0,40%
México	9,51%	7,00%
Reino Unido	5,16%	2,00%
Sudáfrica	9,63%	6,40%
U.S.A.	3,61%	2,90%

Tomado de: **The Economist**, Junio 22 – 29, 2001, pp. 104-106

Tener en cuenta la inflación es muy importante cuando se trata de determinar los niveles de las tasas de interés futuras y evaluar inversiones en inflación.

El riesgo

El efecto del *riesgo* es intrínseco al negocio o inversión en que se coloca el dinero o capital: a mayor riesgo, mayor tasa de interés. El riesgo es producido por diversos factores: la inflación futura, la inestabilidad económica y política, la proliferación de normas que hacen inestable la situación de los inversionistas, la devaluación, etc. El elemento riesgo en la tasa de interés es muy importante en el reconocimiento de las tasas de interés que esperan obtener los inversionistas, en la proyección de las tasas de interés cuando se estructura un proyecto o inversión futura y cuando se trata de evaluar el riesgo de una inversión.

Tasa de interés real

El *interés real* o la productividad en su uso es un efecto intrínseco del capital, independiente de la existencia de inflación o riesgo. Éste refleja también la abundancia o escasez de dinero en el mercado (grado de liquidez del mercado) y la preferencia que tengan los ahorradores por la liquidez, es decir, la disponibilidad de dinero en efectivo para consumo.

La relación de estos componentes para determinar la tasa de interés corriente, no es aditiva, sino multiplicativa, o sea que la tasa de interés corriente se puede expresar así:

$$i_c = (1+i_r)(1+i_f)(1+i_p) - 1 \quad (2.6)$$

donde:

i_c = Tasa de interés corriente

i_r = Tasa de interés real

i_f = Tasa de inflación

i_p = Componente de riesgo

Esta noción de componentes es pertinente para *descomponer*, más que para componer, la tasa de interés comercial, i_c . Esto es, que a partir de una determinada tasa de interés comercial i_c , conociendo una o dos componentes, se puede determinar la tercera. Por ejemplo, si se conoce la inflación i_f , y se tiene una tasa de interés libre de riesgo, se puede determinar el interés real i_r ; si se conoce la componente inflacionaria i_f y la tasa de interés real i_r , se puede calcular la magnitud del riesgo, percibido por quien fijó la tasa de interés comercial.

Sin embargo, cuando se hacen proyecciones para evaluar alternativas de inversión, es recomendable proyectar las componentes (*inflación, tasa real y riesgo*) para estimar el valor futuro de una tasa de interés. Por ejemplo, si se utilizan los datos de la tabla 2.1, se puede estimar el monto de la tasa de interés real en esos países, utilizando la siguiente expresión, que se deduce de la relación entre los componentes, recordando que $i_p = 0$:

$$i_c = (1+i_p)(1+i_f) - 1 \quad (2.7)$$

Entonces:

$$i_r = \frac{1 + i_c}{1 + i_f} - 1 \quad (2.8)$$

Tabla 2.2 Tasas de inflación e interés corriente y real de algunos países

País	Interés %	Inflación	Interés real %
Argentina	10,44%	0,20%	10,22%
Australia	4,96%	3,60%	1,31%
Brasil	16,55%	7,70%	8,22%
Canadá	4,22%	2,40%	1,78%
Chile	7,26%	3,70%	3,43%
Colombia	12,64%	7,90%	4,39%
Comunidad Europea Promedio	4,45%	2,30%	2,10%
Dinamarca	5,05%	2,30%	2,69%
Filipinas	10,81%	6,50%	4,05%
Japón	0,01%	-0,40%	0,41%
México	9,51%	7,00%	2,35%
Reino Unido	5,16%	2,00%	3,10%
Sudáfrica	9,63%	6,40%	3,04%
U.S.A.	3,61%	2,90%	0,69%

Tomado de: **The Economist**, Junio 22 – 29, 2001, pp. 104-106 y cálculos del autor

Una aproximación a la tasa libre de riesgo es la que producen los papeles del Estado. En Estados Unidos son los títulos del Tesoro y en Colombia los títulos de tesorería del gobierno colombiano, TES. Se supone que esta tasa es constante, pero no siempre es así. Una interpretación que se le puede dar a este hecho es que aun en las tasas de bonos libres de riesgo existe algún grado del mismo, probablemente asociado con la inflación.

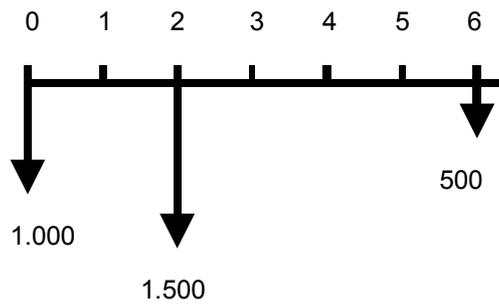
2.4 Diagrama de flujo de caja

El diagrama de flujo de caja libre consiste en un modelo gráfico que se utiliza para representar los desembolsos e ingresos de dinero a través del tiempo. Lo primero que se debe hacer es representar el eje del tiempo:

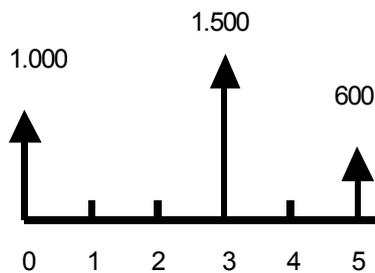


Aquí cada número indica el final del período correspondiente. Así, el número cero indica el momento presente, o sea cuando el que decide se encuentra tomando una decisión; el número uno indica el final del período uno, etcétera. En este eje de tiempo, el período puede ser un día, un mes, un año o cualquier otra unidad de tiempo.

Los desembolsos o egresos se expresan convencionalmente con una flecha hacia abajo; los ingresos, con una flecha hacia arriba; al escribir un desembolso o egreso, en una hoja de cálculo, debe respetarse el signo, es decir, se debe escribir con signo menos. El resultado será flujo de caja.



El diagrama anterior indica que se efectúan desembolsos al final del período cero (hoy) por \$1.000, al final del período dos por \$1.500 y al final del período seis por \$500.



Este diagrama indica que en el período 0 (final del período, hoy) se reciben \$1.000, en el tres se reciben \$1.500 y en el cinco, \$600. De esta manera se puede expresar en forma gráfica y sencilla una inversión de recursos en una fecha determinada y los ingresos o beneficios que produzca en otro período.

2.5 Tasa de interés compuesto

El interés compuesto genera intereses sobre la suma inicial y sobre aquellos intereses no pagados que ingresan o se suman al capital inicial.

Ejemplo 2

\$1.000 de hoy $-P-$ prestados al interés compuesto del 2% mensual $-i\%$, durante dos meses $-n-$ producen $1.000 \times 0,02$ en el primer mes, o sea, \$20, y al final del segundo mes producirán \$20 más, esto es, $1.020 \times 0,02$, o sea, \$40,40 ($F = 1.040,40$).

La tabla 2.3, que ilustra el valor acumulado de una suma de dinero invertida a interés compuesto, permite aclarar estas ideas.

Tabla 2.3 Valor acumulado de una suma de dinero

MES	CAPITAL \$	TASA DE INTERÉS COMPUESTO 2% (\$)	TOTAL \$
1	1.000	20	1.020
2	1.000	$20 + (1020 \times 0,02)$	1.040,40
3	1.000	$40,40 + (1040,40 \times 0,02)$	1.061,21
4	1.000	$61,208 + (1.061,208 \times 0,02)$	1.082,43

A partir de la tabla 2.3 y recordando la aritmética básica, se puede generalizar el comportamiento del interés compuesto, y en particular de la suma total, así: $(1+i)^n$. El valor final de 1.082.43 que aparece en la esquina inferior derecha en la tabla anterior es igual a $1.000 \times (1,02)^4$. Cuando se estudió el concepto de equivalencia, se dijo que $F = P(1+i)$, y que esto se podía generalizar, según lo que se concluye de este ejemplo, como $F = P(1+i)^n$.

En otras palabras, el monto del interés compuesto acumulado se calcula como $P(1+i)^n - P$.

Como se verá más adelante, la expresión $(1+i)^n$ establece la relación entre dos sumas de dinero, P en el período 0 y F en el período n .

2.6 Fórmulas de interés o factores de conversión

El desarrollo metódico de estas fórmulas se conoce en la literatura con el nombre de matemáticas financieras. Nos interesa examinar la relación básica ya mencionada arriba. Para ellos tenemos algunas variables de interés:

n = Número de períodos que se analizan (año, mes, día, trimestre, semana, etcétera). Es claro que se trata de períodos iguales. Nombre como parámetro en la función de *Excel*, *nper*.

i = Tasa de interés, expresada en porcentaje por unidad de tiempo (año, mes, día, trimestre, semana, etcétera). Este interés debe ser estipulado por unidad de tiempo igual al período indicado en n .

Se supone interés compuesto. Nombre como parámetro en la función de *Excel*, *tasa*.

P = Suma presente, situada al final del período cero. Nombre como parámetro en la función de *Excel*, *VA*.

F = Suma futura, situada al final del período n . En otros textos usan la letra S . Nombre como parámetro en la función de *Excel*, *VF*.

Al escribir estas funciones en el texto, se reemplazará el nombre del parámetro de la función en *Excel* por los nombres que aquí se han indicado. Se puede transformar una suma de dinero presente P en el período 0, en una suma de dinero mayor, F , en el período n y viceversa. Esta transformación se puede hacer a partir de la relación ya conocida $F = P(1+i)^n$ y su recíproca, $P = F/(1+i)^n$. Así mismo, interesan las que permiten calcular la tasa de rentabilidad y el valor presente de un flujo de caja futuro.

2.7 Resumen de funciones de excel

$=VF(i;n;;P)$: Convierte una suma presente P al comienzo del período 1, o sea final del período 0 a una suma futura F al final del período n .
$=VA(i;n;;F)$: Convierte una suma futura F al final del período n a una suma presente P al comienzo del período 1, o sea final del período 0.
$=VA(i;n;C)$: Convierte una serie uniforme de valor C , que se inicia al final del período 1 y termina al final del período n a una suma presente P al comienzo del período 1.
$=VNA(i;rango)$: Calcula el valor presente de un flujo de caja libre a la tasa de interés indicada y lo expresa en unidades monetarias del período inmediatamente anterior al que inicia el rango que se indicó en la fórmula.

2.8 Para recordar

Algunas ideas claves:

- Una suma de dinero hoy vale más que esa misma suma de dinero mañana. Eso permite establecer relaciones de equivalencia entre sumas de dinero en diferentes períodos. Esta relación se establece por la tasa de equivalencia, que es la tasa de interés.
- La tasa de interés tiene tres componentes: inflación, riesgo y una tasa real.

2.9 Métodos de decisión

Como la situación que se le presenta al que decide es la de analizar flujos de caja libre hacia el futuro que no siempre presentan dominación, esto es, que los ingresos de una alternativa sean siempre superiores a los de otra y los egresos de ésta sean mayores que los de la primera, se hace necesario buscar mecanismos que permitan comparar las cifras de cada una de ellas. Una forma de hacerlo es utilizar el concepto de equivalencia para llevar los flujos de caja libre a un período determinado y allí sí comparar las cifras. Los métodos que aquí se estudiarán tienen en cuenta el valor del dinero en el tiempo. Los más conocidos son el *Valor Presente Neto* (VPN) y la *Tasa Interna de Rentabilidad* (TIR).

Todos estos planteamientos responden a una pregunta que puede (y debe) hacerse en todas las circunstancias: ¿Cuándo es buena una decisión? No importa si se trata de una decisión personal,

íntima, o de una decisión con consecuencias que afecten a los demás, o de una decisión de tipo financiero. La respuesta siempre será la misma: Cuando los beneficios superen a los costos. Y aquí hay que entender por beneficios y por costos no sólo lo que se puede cuantificar. Por ejemplo, la decisión de no seguir prolongando la vida de manera artificial a un paciente que no puede cumplir con sus funciones vitales e intelectuales sin la ayuda de una máquina. Aquí no sólo intervienen consideraciones de tipo ético y moral, sino también de tipo económico y emocional. En todo caso, siempre habrá que sopesar los beneficios que produce la decisión, si no sus costos.

Valor presente (VP) y Valor presente neto (VPN)

Cuando el que decide se enfrenta a una disyuntiva debe considerar los beneficios y los costos que le implica cada alternativa. Se trata de tomar decisiones que requieren sacrificio de recursos (una inversión) hoy con consecuencias de costos y beneficios futuros. Hay que comparar, como ya se dijo, beneficios y costos. Ya se estudió cómo hacer la comparación de flujos de dinero en diferentes períodos de tiempo.

El valor presente de un ingreso de dinero en el futuro es aquella cantidad que se debe entregar o invertir hoy para asegurar esa misma suma de dinero en el futuro. Esta suma presente es equivalente al flujo de dinero que se espera recibir en el futuro.

El significado del *Valor Presente Neto* se puede ilustrar de la siguiente manera: una persona que hace una inversión espera recibir, a lo largo de la vida de la misma, un valor igual a la suma invertida más una suma adicional; esas sumas que recibe, las “entrega” el proyecto o inversión a lo largo de su vida.

Como el *Valor Presente* descuenta las sumas de dinero futuras, el VPN indica el valor resultante de descontar la suma adicional que recibe el inversionista por su inversión. En otras palabras, es el remanente neto que obtiene el inversionista, en pesos de hoy, después de descontar el ingreso a la tasa de descuento. Se puede considerar que el inversionista “le presta” al proyecto un dinero que

debe ser devuelto con intereses a la tasa de descuento y algo adicional, que es el beneficio que recibe por haber realizado la inversión.

El *Valor Presente Neto* mide el remanente en pesos de hoy, después de descontar la inversión (o el “préstamo” que le hace el inversionista al proyecto) y el “interés” (calculado a la tasa de descuento) que debe “devolver” el proyecto al inversionista. En otras palabras, es el monto por el cual aumenta la riqueza del que decide (individuo o firma) después de haber llevado a cabo la alternativa que se estudia. El VPN, por lo tanto, permite establecer mecanismos que aumenten o maximicen el valor de la firma. Todo esto implica que a mayor tasa de descuento, menor será el VPN.

Puede parecer extraño que a mayor tasa de interés el VPN sea menor. Desde el punto de vista matemático esto es claro, por el papel que juega i en la fórmula (divide). Sin embargo, conviene pensar un poco más en este comportamiento.

La tasa de interés –tasa de descuento– que se utiliza en el cálculo del VPN es el costo del dinero para el que decide (la tasa de interés de oportunidad o costo del capital, lo que paga por ese dinero). Esto es, que se puede pensar que el que decide está ante una “invitación” de un proyecto para invertir en él. Como ese decisor ya se ganaba un interés o pagaba un interés (tasa de interés de oportunidad o costo que pagaba por el dinero), el proyecto debe retornarle, por lo menos, lo que se ganaba en la alternativa que está desechando, y que es aquella en la que en la actualidad tiene invertido su dinero (costo de oportunidad) o lo que paga por los fondos necesarios para la inversión.

Ahora bien, según la definición “intuitiva” del VPN, mientras mayor sea la tasa de interés de oportunidad o el costo del dinero (que ya se ganaba quien decide antes de cambiarle el destino a su dinero o el interés que tuvo que pagar por obtener los fondos), menor será lo que quede después de que el proyecto ha devuelto la inversión y los intereses que ya se ganaba (o pagaba) el que decide (tasa de descuento). Por lo tanto, a medida que la tasa de descuento de quien toma la decisión

aumenta, mayores serán los intereses que tiene que devolver el proyecto y menor, por lo tanto, el VPN, que es lo que le queda de más al que decide y que es lo que lo hace atractivo.

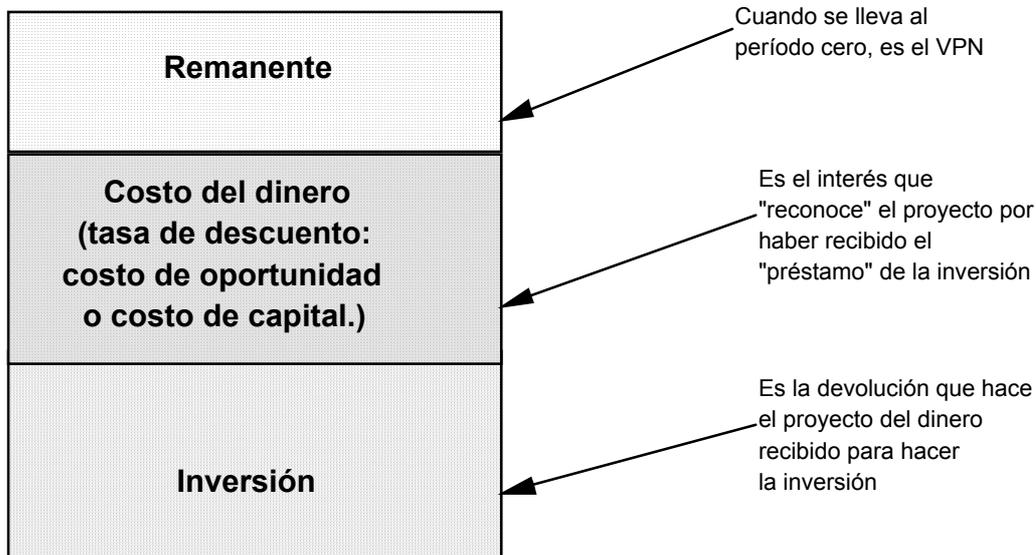
Por ejemplo, si se tiene un proyecto a un año que requiere una inversión de \$1.000 y produce al final del año \$1.500, el excedente sobre la tasa de descuento –tasa de oportunidad– dependerá de ésta; si se supone que el dinero lo tiene el inversionista en una cuenta de ahorros y la tasa que le pagan es su costo de oportunidad, y por lo tanto su tasa de descuento, entonces, como se puede observar en la tabla, mientras más le paguen (mayor costo de oportunidad y mayor tasa de descuento), menor será el remanente por encima de lo que ya ganaba y, por lo tanto, menor el VPN, así:

Año	Proyecto	Ahorros	Diferencia	Proyecto	Ahorros	Diferencia	Proyecto	Ahorros	Diferencia
		20%			30%			40%	
0	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	
1	1.500	1.200	300	1.500	1.300	200	1.500	1.400	100
VPN	250		250	153,85		153,85	71,43		71,43

De igual manera, se podría analizar si el dinero fuera prestado y si se pagaran los intereses y el capital al final del año.

Esto se puede ilustrar con una gráfica. Supóngase que los ingresos de un proyecto se pueden descomponer en tres partes:

- El valor de la inversión que debe devolver el proyecto.
- El valor que ya ganaba en su alternativa, que le permitió definir el costo de oportunidad, o lo que paga la firma por haber prestado el dinero.
- El remanente.



Se pueden presentar entonces las siguientes posibilidades:

Cuando el remanente es positivo y se lleva a período cero, entonces el VPN es positivo.

Cuando el remanente es cero, el VPN es cero al llevar todo a período cero.

Cuando lo correspondiente al costo del dinero (el área de la mitad de la figura) es menor que lo correspondiente a la tasa de descuento, entonces el VPN es negativo.

En la gráfica se puede observar que para un proyecto dado, si la tasa de descuento aumenta, aumentará el área correspondiente y el área del remanente disminuirá. Por lo tanto el VPN será menor.

En forma matemática, el *Valor Presente* se define así:

$$VP = \sum_j \frac{I_j}{(1+i)^j}$$

Donde:

I_j = Suma en el período j
 i = Tasa de descuento
 j = Período

En *Excel*:

=*VA*(*i;n;C;F;tipo*): Cuando se trata de convertir una serie uniforme *C* o una suma futura *F* o la combinación de ambas.

=*VNA*(*i;rango*): Cuando se trata de un flujo de caja libre no uniforme. En este caso hay que tener en cuenta, que el rango debe iniciarse con la celda correspondiente al período 1 y el valor calculado estará expresado en pesos del período 0.

Una forma de entender este concepto es preguntarse qué suma que se espera recibir dentro de un año es equivalente a un peso poseído hoy.

Suponiendo que existe el interés, se puede invertir o dar en préstamo ese peso y recibir $(1+i)$ al cabo de un año, donde i es la tasa de interés vigente para ese año y se liquida como interés compuesto; en otras palabras, se puede cambiar $(1+i)$ recibidos al final de un año por un peso de hoy.

Se puede calcular el *Valor Presente de los Ingresos y de los Egresos* de una alternativa de acuerdo con lo expuesto anteriormente. El *Valor Presente Neto* es la diferencia entre el *Valor Presente de los Ingresos o Beneficios* (*VPB*) y el *Valor Presente de los Egresos o Costos* (*VPC*), esto es, $VPB - VPC$.

En forma matemática compacta, se puede expresar el *Valor Presente Neto* como:

$$VPN(i) = \sum_j \frac{I_j}{(1+i)^j} - \sum_j \frac{E_j}{(1+i)^j}$$

Donde:

I_j	=	Ingreso en el período j
E_j	=	Egreso en el período j
i	=	Tasa de descuento
j	=	Período

En *Excel*:

$=VA(i;n;C;F;tipo) - P$: Cuando se trata de calcular el VPN de una serie uniforme C o una suma futura F o la combinación de ambas con una inversión P en el período 0.

$=VNA(i;rango) - P$: Cuando se trata de un flujo de caja libre no uniforme que es el producto de una inversión P en el período 0. En este caso hay que tener en cuenta que el rango debe iniciarse con la celda correspondiente al período 1 y el valor calculado estará expresado en pesos del período 0, por lo tanto, se puede restar el valor de P , para obtener el VPN.

Obsérvese que no tiene sentido hablar del *Valor Presente Neto* o del *Valor Presente* sin haber especificado una tasa de descuento. Aunque en esta expresión se indica el VPN en función de una tasa de descuento única, esta tasa puede variar con el tiempo, esto es, que para cada período puede existir una tasa de descuento diferente. El cálculo del VPN es muy fácil con hojas electrónicas como *EXCEL*.

En la realidad cada período tiene una tasa de descuento diferente y en ese caso la expresión más general sería:

$$\prod_{j=1}^n (1 + i_j) = (1 + i_1)(1 + i_2) \dots (1 + i_n)$$

\prod significa multiplicación, por ejemplo:

$$\prod_{j=1}^2 (1 + i_j) = (1 + i_1)(1 + i_2)$$

Para ilustrar lo anterior, se presentan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3

Suponga que usted tiene proyectado montar una empresa en un centro comercial muy importante de la ciudad. Los cálculos sobre inversión y beneficios netos durante 10 años, al final de los cuales se venden todos los bienes, son los siguientes:

Año	Flujo de caja
0	-\$3.000.000
1	\$1.000.000
2	\$1.150.000
3	\$1.200.000
4	\$1.300.000
5	\$1.450.000
6	\$1.600.000
7	\$1.850.000
8	\$2.000.000
9	\$2.100.000
10	\$4.500.000

(Estas cifras fueron obtenidas por medio de proyecciones y estimativos de ingresos y costos futuros, por procedimientos que rebasan el alcance de este capítulo.)

Cuando usted hizo los estudios de este proyecto, determinó que su tasa de descuento era la tasa de oportunidad del dinero y que valía 36% anual. Su estimativo consideraba además, que esta tasa no variaría durante los siguientes diez años.

El competidor, quien ya tiene instalada una firma similar en el mismo centro comercial, no desea que se le haga competencia; por lo tanto, prefiere pagarle algo para que usted desista de la idea.

¿Cuánto es lo mínimo que le deben pagar para desistir de la idea? Esta pregunta la responde el VPN porque mide los beneficios que obtendría si emprendiera el negocio y que desecharía al desistir de él.

A su competidor le pareció excesiva la cifra y no le pagó nada, de modo que usted instaló su firma. Cuando ya estaba todo listo para la inauguración, volvió su competidor, que había quedado muy impresionado por el montaje, decoración e imagen que usted presentaba al público y le ofreció comprarle todas las instalaciones para una de sus sucursales.

¿Cuánto es lo mínimo que usted debe pedirle? Esta respuesta la da el Valor Presente de los beneficios netos durante los próximos diez años, ya que no sólo debe desechar el valor de sus

beneficios netos en valor presente, sino que debe entregar la inversión realizada. Por lo tanto, usted le pide por lo menos, \$3.504.319.

A continuación se presentan los cálculos que usted debió realizar para responder a esa pregunta.

$i=$	36.00%
Año	Flujo
0	-3.000.000
1	1.000.000
2	1.150.000
3	1.200.000
4	1.300.000
5	1.450.000
6	1.600.000
7	1.850.000
8	2.000.000
9	2.100.000
10	4.500.000
VPN al 36%	$=VNA(i; \text{rango de año } 1 \text{ a } 10) - P$ $=VNA(36\%; \text{ rango de año } 1 \text{ a } 10) - 3000000$ $=\$504.319$

Valor Presente Neto al 36% anual = \$504.319

Regla de Decisión para el Valor Presente Neto (VPN)

En el ejemplo anterior hasta el momento no se conoce de qué modo usted, después de haber realizado los estudios, tomó la decisión de instalar su firma. Si al calcular el VPN al 36% el resultado hubiera sido cero, de acuerdo con lo visto arriba, ello significaría que sólo estaría recibiendo lo que invirtió. Si el resultado hubiera sido negativo, significaría que el proyecto ni siquiera le “devolvería” el valor invertido en él. Si el resultado fuera positivo, como en efecto lo fue, ello significa que el proyecto le “devolverá” su inversión y una suma adicional. En este último caso usted quedará en una situación económica mejor que la que tenía antes de emprender el proyecto.

De lo anterior se puede deducir fácilmente la regla de decisión para el método del *Valor Presente Neto*, que es un modelo matemático y normativo, y por lo tanto indica qué decisión se debe tomar:

- a) Si el VPN es mayor que cero se debe aceptar.
- b) Si el VPN es igual a cero se debe ser indiferente.
- c) Si el VPN es menor que cero se debe rechazar.

Las reglas anteriores se aplican cuando se trata de rechazar o aceptar una alternativa. En el caso de que se desee ordenar alternativas o entre un grupo de ellas escoger la mejor, la regla de decisión dice que se debe escoger aquella alternativa cuyo *Valor Presente Neto* sea el mayor.

Como se puede observar, estas reglas de decisión –tanto de aceptación de alternativas, como de selección y escogimiento– son consistentes con los supuestos estudiados al principio del capítulo.

Representación Gráfica del VPN

El VPN es una función de la tasa de interés. En el caso particular en que las tasas de interés sean todas iguales a i durante la vida del proyecto o inversión, se tiene la gráfica que aparece en la figura 1. En ella se puede observar que una alternativa tiene VPN positivo para todas las tasas de interés menores que i_r , igual a cero para la tasa de interés igual a i_r y valor negativo para tasas de interés mayores que i_r .

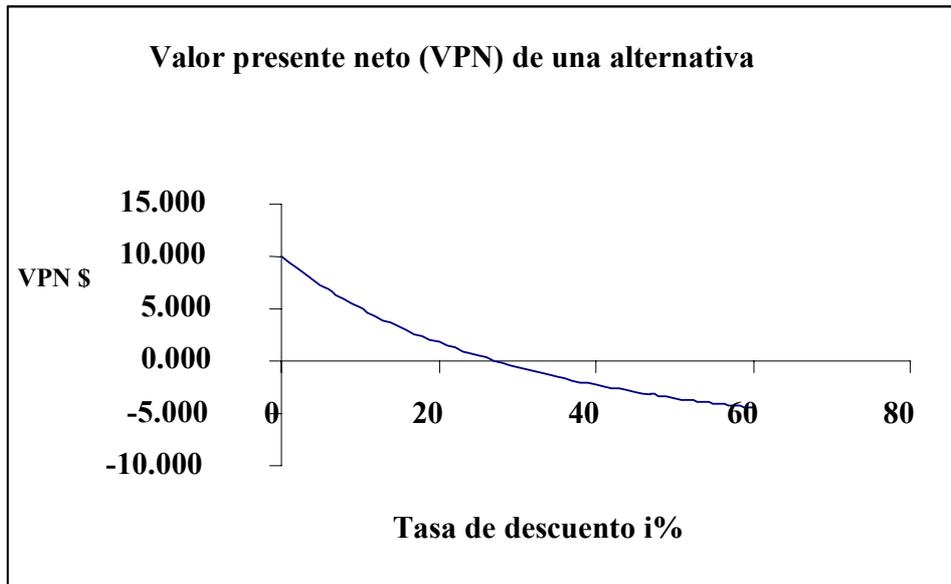


Figura 1

Si se presentan dos alternativas en forma gráfica, como en la figura 2, se puede observar que el ordenamiento o preferencia entre las alternativas depende de la tasa de interés utilizada para calcular el VPN.

Obsérvese en la figura 2 que para i_1 , la alternativa A se prefiere a la alternativa B y para i_2 , la alternativa B se prefiere a la alternativa A .

Para i^* ambas alternativas tienen igual *Valor Presente Neto*, por lo tanto, la persona que toma la decisión debe ser indiferente entre las dos. De aquí se concluye que no es necesario determinar con precisión el valor de la tasa de descuento, pues sólo debe saberse si ésta es menor o mayor que i^* .

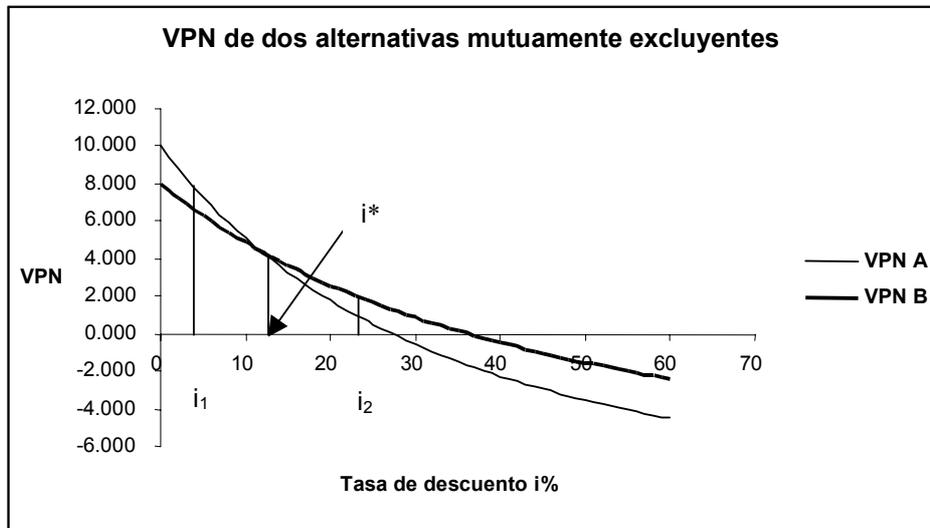


Figura 2

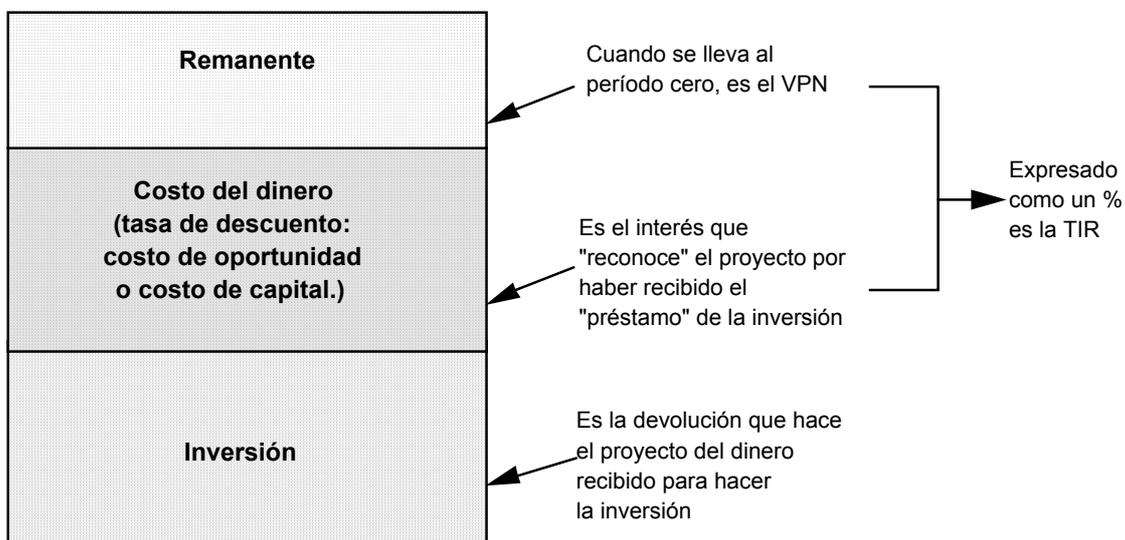
Tasa interna de rentabilidad (TIR)

Otro método que tiene en cuenta el cambio de valor del dinero en el tiempo es la *Tasa Interna de Rentabilidad*. Este método es muy utilizado y para el común de la gente es más fácil de visualizar de manera intuitiva. La *Tasa Interna de Rentabilidad* es una medida porcentual de la magnitud de los beneficios que le reporta un proyecto a un inversionista. Para entender este concepto conviene regresar al concepto de *Valor Presente Neto*. Se dijo arriba que el *Valor Presente Neto* representa el valor que recibía en exceso un inversionista sobre su inversión, después de que se ha descontado el interés de la tasa de descuento. Este cálculo se realiza fijando una tasa de interés, de modo que un *Valor Presente Neto* positivo, a una determinada tasa de interés, indica que el inversionista recibe del proyecto de su inversión un interés sobre su dinero y una cantidad adicional. Ese interés y cantidad adicional que recibe el inversionista es la totalidad de los beneficios que le reporta el proyecto. De modo que cuando el *Valor Presente Neto* es igual a cero, la tasa de interés a la cual esto provee provee una medida de los beneficios que produce la inversión mientras se encuentran invertidos en ese proyecto. A esta tasa de interés se le denomina *Tasa Interna de Rentabilidad*

(TIR). Esto se puede visualizar como la tasa de descuento que hace que el VPN sea cero. En las figuras 1 y 2 la TIR es la tasa de interés donde la curva del VPN corta el eje de las abscisas. De la misma manera que con el VPN, la TIR se puede ilustrar con la misma gráfica que se usó para ese método. Los ingresos de un proyecto se pueden descomponer en tres partes:

- El valor de la inversión que debe devolver el proyecto.
- El valor de lo que ya se ganaba en su alternativa, que le permitió definir el costo de oportunidad, o lo que paga la firma por haber tenido que prestar el dinero.
- El remanente.

En este caso, la suma del remanente y del valor que ya se ganaba en su alternativa, que le permitió definir el costo de oportunidad o lo que paga la firma por haber tenido que prestar el dinero, es lo que produce el proyecto por encima de la suma invertida. Ese valor, medido por medio de una tasa de interés como un porcentaje (que hace que el VPN sea igual a cero), es la *Tasa Interna de Rentabilidad*.



Se pueden presentar entonces, las siguientes posibilidades:

- Cuando el remanente es positivo, entonces la TIR es mayor que la tasa de descuento.

- Cuando el remanente es cero, la TIR es igual a la tasa de descuento.
- Cuando lo correspondiente al costo del dinero (el área de la mitad de la figura) más el remanente es menor que los intereses de la tasa de descuento, entonces la TIR es menor que la tasa de descuento.

La TIR se puede calcular entonces resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sum_j \frac{I_j}{(1+i)^j} - \sum_j \frac{E_j}{(1+i)^j} = 0$$

Esta ecuación la resuelven por prueba y error las calculadoras financieras y las hojas electrónicas que tienen programas para manejar este tipo de ecuaciones y que, instantáneamente, hallan el valor de la TIR.

En *Excel*:

=TASA(n;C;P;F;tipo;i semilla): Cuando se trata de calcular la tasa de interés, a partir de una serie uniforme C o una suma futura F o la combinación de ambas y una suma P .

=TIR(rango;i semilla): Cuando se trata de un flujo de caja libre no uniforme. En este caso hay que tener en cuenta que el rango debe iniciarse con la celda correspondiente al período 0 y terminar con la celda correspondiente al período n . Esto es, debe incluir todos los flujos de caja libre.

Ejemplo 4

Se tiene una inversión con las siguientes características:

$$C_0 = -\$1.000.000 \quad I_1 = \$900.000 \quad I_2 = \$800.000$$

Como se dijo arriba, la *Tasa Interna de Rentabilidad* estará determinada por la tasa de interés que cumpla lo siguiente:

$$900.000/(1+i) + 800.000/(1+i)^2 - 1.000.000 = 0$$

En el caso de *EXCEL* se utiliza la función TIR, ya conocida, y el programa valora esta expresión para diferentes valores de i y se detiene cuando el valor de esa ecuación (el VPN en realidad), es muy pequeño.

Lo que hace la hoja de cálculo es lo siguiente, suponiendo que los datos están ordenados así:

	A	B
1	Año	Flujo
2	0	-1.000.000
3	1	900.000
4	2	800.000

En este ejemplo $=TIR(0,30,B2..B4) = 45,1249\%$ el programa calcula el VPN a 30% y verifica si es mayor o menor que cero. Si es mayor que cero lo recalcula utilizando una tasa de interés mayor y así sucesivamente hasta cuando el VPN sea negativo. En este caso lo vuelve a calcular con una tasa de interés menor hasta cuando el VPN sea positivo otra vez.

Este proceso se repite hasta cuando el VPN encontrado en valor absoluto sea menor que un valor muy pequeño (del orden de una cien milésima) o se hayan realizado unas treinta iteraciones; si en las treinta iteraciones no encuentra el valor de i que determine el VPN suficientemente pequeño, declara error.

La TIR del ejemplo del inversionista que instala un centro comercial calculada con la hoja de cálculo es 41,5425%.

Conviene además hacer énfasis en dos hechos: Primero, que la *Tasa Interna de Rentabilidad* indica la rentabilidad del dinero mientras éste se encuentra invertido en el proyecto; y segundo, que

este método supone implícitamente que los fondos liberados a lo largo de la vida del proyecto son reinvertidos a la *Tasa Interna de Rentabilidad*. (Obsérvese la diferencia de suposiciones con relación al VPN.)

Esta suposición también puede ilustrarse con un ejemplo.

Ejemplo 5

Si se tiene una inversión así:

Año	Flujo
0	-1.000
1	300
2	1.300

Para $i = TIR$ el VPN de esta inversión será cero. Ahora bien, si se supone que los fondos liberados por el proyecto se reinvierten a la tasa $r\%$, entonces el VPN será:

$$VPN(r, TIR) = -1,000 + 300(1+r)/(1+TIR)^2 + 1,300/(1+TIR)^2$$

Si r es mayor que TIR, entonces el VPN(r, TIR) será mayor que cero, y si r es menor que TIR, el VPN(r, TIR) será negativo. Por lo tanto para que $VPN(r, TIR) = 0$, r debe ser igual a TIR.

Regla de decisión para el método de la Tasa Interna de Rentabilidad

Igual que el VPN, la TIR es un modelo matemático y normativo que dice lo siguiente:

- a) Si la TIR es mayor que la tasa mínima aceptable, se debe aceptar.
- b) Si la TIR es igual a la tasa mínima aceptable, se debe ser indiferente.
- c) Si la TIR es menor que la tasa mínima aceptable, se debe rechazar.

Debe observarse que esta regla de decisión coincide con la del *Valor Presente Neto* para aceptar o rechazar alternativas. Esto se puede ver con claridad en las figuras 1 y 2.

Para el caso de la inversión en el negocio del centro comercial, como la TIR es 41,67%, lo cual es mayor que 36%, se acepta la inversión. En el otro ejemplo la TIR es de 45,13%, lo cual es mayor

que 30%, por lo tanto también se acepta la inversión. La *Tasa Interna de Rentabilidad* puede usarse para aceptar o rechazar alternativas, pero no para seleccionarlas. Esto quiere decir que una alternativa con mayor TIR que otra no necesariamente es la mejor.

2.10 Resumen

En este capítulo se ha estudiado el concepto de equivalencia que establece la relación entre sumas de dinero en diferentes períodos de tiempo. A partir de allí se estudió el concepto de interés (I) y de tasa de interés ($i\%$). Se analizaron los componentes de una tasa de interés: inflación, riesgo y tasa de interés real.

Con base en los conceptos anteriores se trabajaron las funciones y fórmulas que permiten hacer las transformaciones entre sumas presentes y futuras.

Se han presentado diversos métodos para la evaluación y ordenamiento de alternativas, a saber: el *Valor Presente Neto* (VPN) y la *Tasa Interna de Rentabilidad* (TIR); se ha visto que la TIR puede ser utilizada para la justificación de alternativas, pero no para su ordenamiento.

Con estas herramientas, el lector estará capacitado para hacer cualquier tipo de análisis que tenga que ver con tasas de interés y flujos de caja futuros.

2.11 Referencias

Grant, E.L., W. G. Ireson, *Principles of Engineering Economy*, New York: The Ronald Press, Co, 4^a ed, 1960.

The Economist, Junio 22 – 29, 2001, pp. 104-106.

Vélez Pareja, Ignacio, 2002, *Decisiones de Inversión. Enfocado a la valoración de empresas*, 3^a edición, CEJA, Universidad Javeriana, Bogotá. Se puede consultar en línea en www.poligran.edu.co/decisiones.