7

Análisis de inversiones bajo riesgo: simulación

"... ahora era menester producir para un mercado cada vez más vasto y ya no se podrían determinar por adelantado las posibilidades de venta.... las leyes imprevisibles del mercado decidían si los productos podían ser vendidos y con qué beneficio.
...El día de mercado se tornó en el día del juicio para los productos del esfuerzo humano.
...el capitalismo libertó al individuo. ... El individuo se convirtió en dueño de su destino: suyo sería el riesgo, suyo el beneficio.
...El hombre... es víctima de la duda acerca de sí mismo y del fin de su existencia. Se halla amenazado por fuerzas poderosas y suprapersonales: el capital y el mercado."
(E. Fromm. El miedo a la libertad.)

A pesar de la eliminación de los supuestos sobre certidumbre total, los enfoques presentados hasta ahora no permiten involucrar la complejidad de la interacción de las muchísimas variables que tienen que ver con un proyecto de inversión. Para mencionar algunas de ellas, se puede pensar en: ¿Qué tasa de interés será la adecuada para el futuro? ¿Cuánto valdrá la inversión? ¿Cuándo comenzará a producir beneficios? ¿Por cuánto tiempo? ¿Cuánto tiempo habrá que invertir? ¿Qué mercado existirá? ¿Cuál será la inflación en los próximos años? ¿Cuáles serán los precios de insumos y productos? etc.

Medición analítica del riesgo

Para responder a estos interrogantes se han presentado varios enfoques. *Hillier* propuso un manejo de tipo analítico para tratar el problema a partir del conocimiento de las distribuciones de probabilidad de las diferentes variables involucradas, de tal manera que se pudiera determinar la distribución final de un indicador como el *Valor Presente Neto* o la *Tasa Interna de Rentabilidad*.

Una forma de disminuir la incertidumbre es obtener más información, lo cual exige más recursos: humanos, de tiempo, monetarios, etc. En el ejemplo del grupo de ejecutivos se redujo la incertidumbre al tratar de estimar el valor esperado y la desviación estándar del flujo de dinero.

El método propuesto por *Hillier* para manejar este tipo de situaciones hace uso del Teorema del límite central de la estadística, y dice que la distribución del *Valor Presente Neto*, *Costo Anual Equivalente* o *Tasa Interna de Rentabilidad*, es aproximadamente normal, inclusive cuando las distribuciones de las variables que se incluyen, o que determinan el flujo de caja del proyecto, no sean normales. Debe observarse, y así lo dice, que hace caso omiso del problema de la discrepancia entre los criterios y de la posibilidad de múltiples tasas de interés. Realmente esto no presenta una limitación del método, ya que se han propuesto formas de eliminar las discrepancias entre los criterios y la posibilidad de múltiples tasas internas de rentabilidad. Lo que propone *Hillier* es enfrentar al decisor con las diferentes probabilidades de obtener distintos valores del *Valor Presente Neto* de una inversión. Más específicamente, la probabilidad de que el VPN sea menor que cero.

De acuerdo con el método de *Hillier*, se tiene:

$$E(VPN) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\overline{I}_j}{(1+i)^j}$$

$$Var(VPN) = \sum_{j=0}^{N} \frac{Var(I_j)}{(1+i)^{2j}} \qquad (5.2)$$

Donde:

E(.)	=	Valor esperado de la expresión que va dentro del paréntesis.
Ij	=	Flujo de caja del período *j*.
$\overline{I}_j$	=	Valor esperado de los ingresos netos del período *j*.
Var(.)	=	Varianza de la expresión dentro del paréntesis.
i	=	Tasa de descuento.
N	=	Vida del proyecto en años.
j	=	Período que se analiza.

Aquí hay que anotar que Hillier está suponiendo una tasa de descuento constante. Esto no es lo que ocurre en la realidad puesto que hay cambios en la tasa de descuento (costo promedio de capital) por varias razones; tres de ellas son la inflación que afecta el nivel de las tasas de interés en el mercado, el endeudamiento, que afecta el cálculo del costo promedio de capital y el mismo valor presente que se desea calcular (valor de mercado, ver nota de pie 1).

Si se tiene en cuenta este hecho, la formulación debería cambiar a

$$E(VPN) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\overline{I}_j}{\prod (1 + i_j)}$$

$$Var(VPN) = \sum_{j=0}^{N} \frac{Var(I_j)}{\left(\prod (1 + i_j)\right)^2}$$

El operador $\prod$ significa que lo que hay dentro del paréntesis cambia para cada período y que se multiplican entre sí.

La distribución del VPN tiende a ser normal y con estos parámetros se puede calcular la probabilidad de fracaso; los resultados son mejores en la medida en que las distribuciones de los diferentes componentes sean más cercanas a la normal.

Ejemplo 1

Para el caso del ejemplo mencionado en el capítulo 3:

$$E(VPN) = -5.000 + \frac{1.500}{1,2} + \frac{1.500}{1,44} + \frac{2.000}{4,3} .... = 667,51$$

$$VAR(VPN) = 40.000 + \frac{10.000}{(1,2)^2} + \frac{22.500}{(1,2)^4} + \frac{302.500}{(1,2)^6} .... = 154.469,24$$

$$\sigma(\text{VPN}) = 393,03$$

Con una tabla de la distribución normal se pueden hallar algunas probabilidades; por ejemplo:

$$P(VPN \le 0) = P\left[Z \le \frac{(667,51 - 0)}{393,0} = 1,697 \right] = 0,04457 \text{ ó } 4,457\%$$

El cálculo de esta probabilidad se puede hacer con las funciones estadísticas de *Excel* *=DISTR.NORM(x,media,desv_estándar,acum)* o *=DISTR.NORM.ESTAND(z).* En este punto el decisor posee toda la información cuantitativa posible de obtener; deberá ahora tomar una decisión que involucra su actitud hacia el riesgo. El modelo no puede acompañar al decisor más allá de la información cuantitativa; la acción final de tomar una decisión es un acto de soledad. Esto es, para algunos un 10% de probabilidad de que el proyecto sea indeseable puede parecer poco, para otros, un 2% es excesivo. También en esto tiene que ver la cantidad de dinero que esté en juego. Más adelante se estudia lo relacionado con las actitudes hacia el riesgo.

Por otro lado, *David B. Hertz* propuso en 1964 un enfoque que permite aproximarse de manera empírica a este problema tan complejo. Su idea básica es no seguir trabajando con promedios o valores esperados como si fueran eventos ciertos, o sea con probabilidad 1 de ocurrencia. Lo propuesto por *Hertz* es conocido como análisis del riesgo, utiliza la simulación y casi siempre requiere usar un computador.

Simulación

Simulación, en el sentido más común de la palabra, significa imitar. Y de esto se trata; se va a imitar el comportamiento de un sistema a través de la manipulación de un modelo que representa una realidad (*Véase* cap. I. *El Proceso de Decisión*).

La simulación ha sido utilizada desde hace mucho tiempo, especialmente por los diseñadores; por ejemplo, se tiene la prueba de modelos a escala de aeroplanos en túneles de viento, modelos de represas, distribución en planta, etc. Con el surgimiento de la investigación operacional y con la disponibilidad de los computadores, esta técnica es de gran utilidad.

Hay ciertos problemas que son muy complejos y cuya solución analítica es prácticamente imposible. La propuesta de *Hillier* supone un manejo analítico del problema; sin embargo, la complejidad de las distribuciones de probabilidad puede ser alta, de manera que conocer sus parámetros es muy difícil o imposible. A pesar de que la técnica de simulación tiende a ser un procedimiento costoso, es uno de los enfoques más prácticos para abordar un problema.

La simulación implica la construcción de un modelo, el cual es matemático en gran parte. Antes de describir el comportamiento total del sistema, la simulación describe la operación de ese sistema en términos de eventos individuales de cada componente del mismo, cuyo comportamiento se puede describir por lo menos en términos de distribuciones de probabilidad. La interrelación entre estos componentes se puede involucrar dentro del modelo. La combinación de los eventos posibles y el efecto de la interrelación entre los mismos, le permite al analista determinar la configuración adecuada de los subsistemas. Como la simulación trabaja con un número finito de pruebas, se incurre en un error estadístico que hace imposible garantizar que el resultado sea el óptimo. De hecho, muchas veces no se busca el óptimo de una solución sino el comportamiento de determinado parámetro.

Una manera de hacer una simulación es la llamada *técnica de MonteCarlo*. Antes de ilustrar el uso de la simulación conviene presentar algunas ideas sobre los números o dígitos aleatorios y la forma de generarlos. Estos números permiten tener en cuenta la interrelación entre las variables aleatorias.

Para realizar una simulación deben tenerse en cuenta los siguientes pasos:

1. Preparar un modelo de proyección de los resultados. Aquí deben tenerse en cuenta las relaciones entre diferentes variables. Un ejemplo de modelo de proyección financiera se encuentra en Vélez, 2002, capítulo 6.
2. Determinar las variables que se van a simular. Una forma de identificarlas es un análisis de sensibilidad. (Vélez, 2000, capítulo 6).
3. Determinar las distribuciones de probabilidad de las variables que se van a simular. Estas distribuciones se pueden basar en datos históricos on en apreciaciones subjetivas de la probabilidad. Ver capítulo 3.
4. Establecer las correlaciones entre las variables. En el modelo de proyección se deben establecer este tipo de relaciones. Por ejemplo, el modelo ya mencionado de Vélez, 2002, contempla relaciones entre variables tales como la elasticidad precio-demanda, aumentos de precios nominales y tasa de inflación, por ejemplo. Estas relaciones explícitas evita que aparezcan escenarios inconsistentes. Un escenario inconsistente puede ser aquel que estipula una inflación de 12% y un aumento de precios nominales de 2% (usualmente los aumentos de precios nominales o tasas de interés nominales tienen un valor por lo menos igual a la tasa de inflación).

5. Calcular el número de simulaciones a realizar basado en estimaciones de error aceptable y confiabilidad. Debe recordarse que en realidad una simulación es una muestra que se toma de un universo infinito de posibilidades.
6. Correr las simulaciones. Cada corrida es un escenario posible y consistente basado en los supuestos establecidos en el modelo. Cada resultado debe ser guardado. Por ejemplo, puede guardarse el valor absoluto del resultado o registrarse si ese resultado cumple con algún criterio (por ejemplo mayor o menor que cero) o ambos. Se recomienda que los resultados se registren de ambas maneras.
7. Analizar estadísticamente los resultados. Por ejemplo, valor esperado, varianza, probabilidad de que el resultado asuma ciertos valores, histograma o gráfica de la distribución de probabilidad, coeficientes de variación ((Valor esperado de la simulación)/(varianza de la distribución)), medición de pérdidas o ganancias esperadas, etc.

Números Aleatorios

En simulación la generación de observaciones aleatorias se realiza por medio de los números o dígitos (de 0 a 9) aleatorios. Estos números han sido seleccionados de manera que cada uno de ellos tiene igual probabilidad de aparecer, sin tener en cuenta el número de veces que haya aparecido antes.

Los números aleatorios se pueden encontrar en tablas especiales; en estas tablas se encuentra una serie muy grande de números o dígitos, por ejemplo un millón, de manera que se cumpla con la condición de igualdad de probabilidad de ocurrencia. Esto significa que si se contara el número de veces en que aparece el 0, el 1, el 2, etc. se encontraría que cada uno de ellos aparece igual número de veces. Por medio de estas tablas se pueden generar muestras aleatorias. Por ejemplo, si se desea obtener una muestra aleatoria de un grupo de 54 estudiantes, se numeran éstos del 01 al 54. En la tabla se buscan pares de dígitos y si éstos son menores que 54 se selecciona al individuo y, por el contrario, si son mayores o repetidos, se desechan. Para utilizar la tabla de números aleatorios se selecciona en forma arbitraria un número cualquiera de la tabla y se lee la serie de números que aparece en cualquier dirección (hacia abajo, arriba, la derecha o la izquierda). Se debe mantener la misma dirección para leer los números.

Ejemplo 2

Si se toma de la tabla de números aleatorios resumida en el siguiente párrafo, el número 8 en negrilla, se puede leer en cualquier dirección, así: hacia la derecha 824448, etc., o hacia abajo 86, etc., o hacia la izquierda 854355...etc.

023	141	037	039	458	816
462	931	455	345	**8**24	448
446	857	303	846	627	520

Ahora bien, con la disponibilidad de computadores y microcomputadores no es necesario utilizar tablas. Por ejemplo, las hojas electrónicas traen incorporadas funciones que permiten calcular en centésimas de segundo el número de dígitos aleatorios que se deseen.

Así mismo, algunas calculadoras de bolsillo tienen funciones que permiten generar números aleatorios.

Para simular con computadores se han desarrollado métodos para generar observaciones aleatorias a partir de distribuciones conocidas. En *Excel* se deben utilizar las funciones *=ALEATORIO* y, *=BUSCARV* o *=BUSCARH*. Para generar las observaciones aleatorias más fácilmente, se puede utilizar la *macro* de *Generación de números aleatorios* de la opción de menú *Análisis de datos* de *Herramientas* en el menú de *Excel*.

Existen programas comerciales que se adicionan a *Excel* y que sirven para este tipo de operaciones con simulación. Algunos de ellos son Crystal Ball, @Risk o RiskMaster (www.riskmaster.com o en www.riskease.com/) desarrollado por Savvakis C. Savvides. Son complementos (Add-in) que trabajan con Lotus 1-2-3 o Microsoft Excel. El lector interesado puede bajar un programa de muestra desde: http://www.treeplan.com/, o desde: http://www.decisiontoolpak.com/. También en http://www.kellogg.nwu.edu/faculty/myerson/ftp/addins.htm se puede bajar Simtools y es gratis. Cristal Ball es un excelente programa desarrollado por Decisioneering. Se pueden bajar demos desde http://www.decisioneering.com/downloadform.html. @Risk es un programa desarrollado por Palisade y se puede obtener información desde http://www.palisade.com/O también puede programarse para el caso específico, en Visual Basic[1].

[1] El ejemplo Simulación.xls que se puede bajar de www.poligran.edu.co/decisiones tiene una macro para simular desarrollada en Visual Basic.

Muestra de un Universo

Si se considera que en el país los habitantes están repartidos por igual entre ambos sexos (50% hombres, 50% mujeres), y se escogen 100 personas al azar, se esperaría encontrar 50 hombres y 50 mujeres, aproximadamente.

También, si en una urna se tienen 100 bolas con la siguiente distribución:

bolas negras	20
bolas rojas	30
bolas blancas	10
bolas amarillas	40

Y se extraen 20 bolas al azar, se esperaría que estuvieran distribuidas así (aproximadamente):

Bolas negras	4
Bolas rojas	6
Bolas blancas	2
Bolas amarillas	8

Si se repitiera muchas veces este experimento de extraer 20 bolas de una urna, en promedio el porcentaje de cada color sería proporcional al número de bolas de cada color en la urna original.

Ahora bien, si se tiene información sobre cierto fenómeno, por ejemplo las ventas de un producto, y con base en esa información se estiman las probabilidades de los diferentes niveles de ventas, así:

EJEMPLO 3

Unidades	Probabilidad
1.000	10%
2.000	25%

3.000	40%
4.000	25%

Entonces, a cada nivel de ventas y su probabilidad asociada, se le puede asignar bolas de diferentes colores proporcionalmente al porcentaje que dé la probabilidad de ocurrencia, así:

Unidades	Bolas
1.000	10 rojas
2.000	25 negras
3.000	40 blancas
4.000	25 amarillas

Si esas 100 bolas se introducen en una urna y se extrae una bola de color amarillo, entonces se dirá que "ocurrió" una venta de 4.000; si se hubiera extraído una de color rojo, se diría que "ocurrió" una venta de 1.000 unidades. Ahora bien, como la idea es identificar cada nivel de ventas con uno y sólo un color, se puede hacer lo mismo con números de 00 a 99. Debe tenerse en cuenta que el número de cifras que deben contener los números aleatorios que se utilicen, depende del número de cifras significativas decimales de la probabilidad. Por ejemplo, en este caso, el número de cifras significativas de la probabilidad es 2, por lo tanto se deben utilizar números aleatorios de dos cifras, así:

Unidades	Números aleatorios
1.000	00-09
2.000	10-34
3.000	35-74
4.000	75-99

Aquí se han asociado los números 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08 y 09 al nivel de ventas de 1.000 unidades y en forma similar con los demás niveles. Entonces si en una urna se introducen 100 bolas marcadas de 00 a 99 y se extrae la que tiene el número 15, se identifica con el nivel de 2.000 unidades, o sea, se supone que "ocurrió" una venta de 2.000 unidades. Los números en la urna deben tener igual oportunidad de salir para que la probabilidad de cada nivel sea proporcional a la cantidad de números asignados a cada uno. Si eso se cumple, estos números los cuales se describieron en la sección anterior, son aleatorios.

La simulación: herramienta para analizar modelos complejos

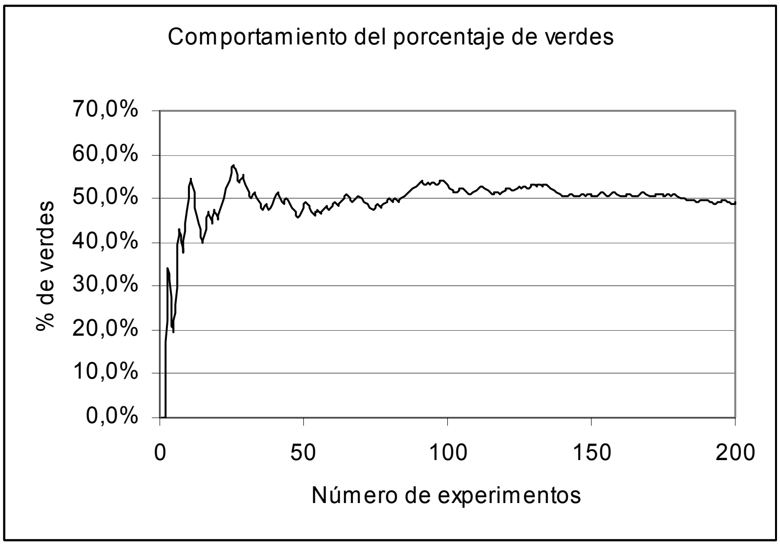
Muchas veces los modelos que se construyen (por ejemplo, el modelo financiero de una firma) pueden ser muy complejos y no es fácil predecir su comportamiento. Para ilustrar esta aseveración examinaremos un ejemplo muy simple.

EJEMPLO 4

Supongamos que hay un modelo que nos indica los siguientes resultados:

Resultado visible: verde o blanco	Resultado numérico 0 o 1	Número de pruebas	Número de verdes acumulados	Porcentaje de verdes
verde	1	1	1	100,0%
verde	1	2	2	100,0%
blanco	0	3	2	66,7%

¿Podríamos decir algo acerca del comportamiento del modelo? O si se quiere, ¿acerca de la "ley" que rige el experimento? Pocos se atreverían a decir con relativa certeza cuál es esa ley. Yo no lo haría. Sin embargo, si repetimos el experimento muchas más veces, digamos unas 200 veces talvez podamos aventurarnos a hacerlo. El comportamiento del porcentaje acumulado de verdes para 200 pruebas se muestra en la siguiente figura.



Vistos estos resultados ya se podría hacer un pronóstico mucho más razonable y seguro de cuál es la "ley" que hay detrás de este experimento. Si alguien dice que equivale al lanzamiento de una moneda estaría muy acertado[2].

Tasa de descuento cuando se hace análisis del riesgo

Las tasas de interés que se encuentran en el mercado, tienen implícita una componente de riesgo y se sabe que a mayor riesgo, mayor tasa de interés. Sin embargo, hay que hacer claridad sobre qué mide el riesgo que se encuentra en esas tasas de mercado.

Cuando se introduce el elemento riesgo de manera explícita, esto es, cuando se analizan los flujos de caja basados en la distribución de probabilidad de las variables que lo determinan, se debe utilizar una tasa de interés libre del riesgo que se está analizando, de otra manera se estaría contando doble el efecto de ese riesgo: una vez como la componente

[2] Este ejemplo se elaboró generando números aleatorios entre 0 y 1 y los valores menores que 0,5 se asignaron al color blanco y los mayores que 0,5 se asignaron a verde. Este ejemplo se puede bajar de www.poligran.edu.co/decisiones. El archivo se llama Simulación.xls.

de riesgo que hay en la tasa de interés, y otra cuando se reconoce la variación de manera explícita a través de una distribución de probabilidad. Así mismo, se planteó que una de las formas de manejar el problema del riesgo era, hace algunos años, aumentar la tasa de descuento; en realidad, lo que se hacía era reconocer que para compensar el riesgo de una inversión debería exigírsele más, objetivo que se lograba aumentando la componente de riesgo en la tasa de descuento.

Si el costo de capital (deuda más costo de los fondos aportados por los inversionistas) se calcula midiendo el costo de cada fuente de capital, entonces allí está incluido algún grado de riesgo. Usualmente el costo promedio de capital se calcula utilizando el modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM) que se estudia en el capítulo sobre portafolio. Si al medir el costo promedio de capital se puede suponer que se captura todo el factor del riesgo que existe, entonces se supone que esa tasa ya tiene involucrado el riesgo y por lo tanto no se debe utilizar cuando se introduce el riesgo de manera explícita. Si por el contrario, no tiene involucrado el riesgo que se introduce de manera explícita en el análisis, entonces el costo promedio de capital calculado con el modelo *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* debe ser utilizada para descontar los flujos de caja cuando se hace el análisis del riesgo de manera explícita. Esta tasa de descuento, el costo promedio de capital que se calcula utilizando el CAPM, no tendría incluido el riesgo que se desea medir en la simulación.

¿Qué piensan algunos autores al respecto? Ross, Westerfield y Jaffe, (R&W&J), 1999, pp. 300-303 opinan lo siguiente:

"El coeficiente beta de una acción no sale del aire. Más aun, está determinado por las características de la firma. Consideramos que hay tres factores claves: la naturaleza cíclica de los ingresos, el apalancamiento operativo y el apalancamiento financiero." p. 300.

Consideran además que "Vale la pena anotar que lo cíclico no es lo mismo que la variabilidad. Por ejemplo, una firma que produzca películas tiene ingresos muy variables debido a que los altibajos del gusto del espectador no son fácilmente predecibles. Sin embargo, debido a que los ingresos de un estudio cinematográfico dependen más de la calidad de sus producciones que del ciclo económico, las productoras de películas no tienen un ciclo muy acentuado. En otras palabras, acciones con una alta variabilidad (alta desviación estándar en su rentabilidad) no necesariamente tienen un coeficiente beta muy alto…" P 301

El apalancamiento operativo tiene que ver con la estructura de los costos fijos y variables, no con la variabilidad. El apalancamiento financiero tiene que ver con la deuda. Terminan anotando.

Al calcular el costo promedio de capital correctamente (con valores de mercado) este costo se ajusta automáticamente en cada simulación, aun cuando entre las variables que se simulan no se incluya directamente aquellas que tienen que ver en forma directa con el costo de capital (esto es, inflación, coeficientes betas, etc.). Este ajuste ocurre precisamente porque el costo promedio de capital basado en valores de mercado depende del valor total que a su vez es función de los flujos de caja libre y del mismo costo de capital[3]. En otras

[3] Para un tratamiento detallado de este cálculo con valores de mercado y circularidad, ver Vélez y Tham, 2002.

palabras, lo que afirman Ross et al. significa que el mercado no "paga" por un riesgo no sistemático (riesgo que afecta a una empresa en particular). El mercado paga por el riesgo sistemático, o sea el que afecta a todas las firmas de una economía. Como se verá en el capítulo sobre portafolio, el riesgo no sistemático se puede eliminar por medio de la diversificación.

Según esto, para Ross *et al*. el coeficiente beta (y por lo tanto el costo promedio de capital) no refleja la variabilidad de los parámetros de entrada que nos ocupa. Y con ello, se debería concluir que cuando utilizamos el costo promedio de capital no se está incluyendo el riesgo asociado con la variabilidad asociada a las variaciones de parámetros específicos de la empresa representada en un modelo financiero. Esto significaría que cuando se descuenta un flujo de caja libre esperado (que en términos prácticos implica suponer certidumbre total) deberíamos añadir una prima de riesgo al costo promedio de capital. Por el contrario, si incluimos de manera explícita el riesgo en el análisis (utilizando la simulación, por ejemplo), debemos utilizar el costo promedio de capital como si fuera la tasa "libre de riesgo". En este caso se habla de tasa "libre de riesgo" en cuanto a que no toma en cuenta el riesgo asociado a las variaciones de los parámetros.

Por el otro lado, Brealey y Myers (B&M), 2000, tienen la posición contraria. Ellos consideran que el costo promedio de capital ya tiene incluido todo el riesgo que enfrenta la firma. De manera que si deseamos descontar los flujos de caja libre esperado (como si estuviéramos en una situación de certeza total), para tener en cuenta el riesgo deberíamos utilizar el costo promedio de capital. Y si incluyéramos el riesgo de manera explícita en el análisis, se debería utilizar la tasa libre de riesgo.

Si se utiliza el enfoque de R&W&J al descontar el valor esperado del flujo de caja libre con el costo promedio de capital más una prima de riesgo (que no es claro cómo calcularla) para tener en cuenta la variabilidad de los parámetros de entrada, la decisión debería ser la misma que si el gerente decidiera conociendo el valor esperado del VPN y su probabilidad de fracaso, teniendo en la mente y en el corazón la función de utilidad de la firma (sea lo que sea esa función).

Por el contrario, si se utiliza el enfoque de B&M entonces al calcular el valor presente de los flujos de caja libres con el costo promedio de capital se debe llegar a la misma decisión que tomaría el gerente con la función de utilidad de la firma en su mente y corazón conociendo el valor esperado del VPN y su probabilidad de fracaso, pero calculando este VPN con la tasa libre de riesgo.

En este texto creemos que el enfoque de Ross et al. es el adecuado.

Precisemos una vez más esta posición. La simulación de Monte Carlo debe hacerse usando el costo promedio de capital que no incluye el riesgo asociado a la variabilidad de los parámetros o variables que deseamos simular.

Como el supuesto implícito es que el riesgo asociado a la variabilidad es no sistemático (que se puede diversificar) entonces si se utiliza el costo promedio de capital, ya sea usando el valor esperado del flujo de caja libre o simulando, habrá que suponer siempre que la firma diversifica totalmente el riesgo asociado a la variabilidad. Esto no es una suposición razonable, sobre todo si se está analizando el flujo de caja de una firma (para valorarla a precios de mercado) o si se está analizando un proyecto aislado (por ejemplo, el sembrado de palma africana).

Aquí consideramos que es posible tomar una mejor decisión si se calcula el valor esperado del VPN y se añade a esta cifra el análisis o consideración de la probabilidad de fracaso. Por el contrario, si se utiliza el valor esperado de los flujos de caja y se usa el costo promedio de capital (que no incluye el riesgo de la variabilidad) habría que calcular una prima de riesgo que finalmente tendría que ser subjetiva, cuando no arbitraria. Hacia el final del capítulo mostraremos con el ejemplo que se presenta a continuación, cómo se puede involucrar en la decisión la distribución de probabilidad resultante de la simulación y la actitud hacia el riesgo, medida con una función de utilidad.

Cómo generar observaciones aleatorias desde una distribución de probabilidad

En el caso de una distribución discreta, se asignan los números aleatorios en forma proporcional a la probabilidad de los diferentes eventos previstos para la variable. Si se utiliza el ejemplo anterior, lo que se hizo es equivalente a construir un histograma de frecuencia acumulada, generar un número aleatorio, entrar a la gráfica por el eje de las ordenadas, trazar una perpendicular hasta cuando corte el histograma e identificar el valor de la variable.

En general, se debe proceder de la siguiente forma: a) Determine la función de distribución acumulada $F(X) = P(X \leq x)$ donde X es la variable aleatoria; b) Genere un número aleatorio con el número necesario de dígitos, incluyendo los ceros en cualquier posición en que se encuentren y colocando el punto decimal a la izquierda; c) Igual $P(X \leq x)$ a ese número decimal y resuelva para x. Este valor de x es la observación aleatoria requerida. El procedimiento gráfico es adecuado para una simulación manual. Con el advenimiento de los computadores personales el procedimiento es más sencillo para el usuario. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5

Supóngase una inversión de $4.375.000 en un sembrado cuyo fruto es perecedero[4]. De acuerdo con datos históricos, la demanda se ha comportado de la siguiente forma:

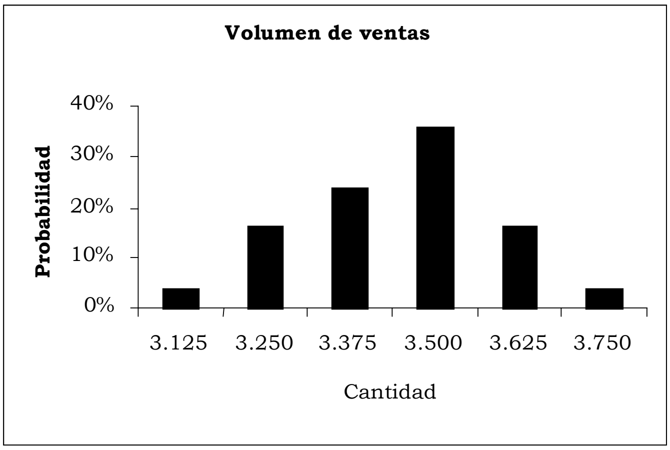
Ventas (unidades) Punto medio	Frecuencia Relativa %
3.125	4
3.250	16
3.375	24
3.500	36
3.625	16
3.750	4

Como las probabilidades tienen dos cifras significativas, entonces se asignan 100 números de 00 a 99 (que tienen igual probabilidad de ocurrencia) en forma proporcional a la probabilidad. Observe la tabla y encontrará que para un evento con probabilidad de 4% hay asignados cuatro números (00 a 03).

Ventas (unidades) Punto medio	Números aleatorios Asignados
3.125	00-03
3.250	04-19
3.375	20-43
3.500	44-79
3.625	80-95
3.750	96-99

[4] Este ejemplo (con cifras diferente) se puede bajar de www.poligran.edu.co/decisiones. El archivo se llama Simulación.xls.

La distribución de probabilidad de esta variable se ve así:



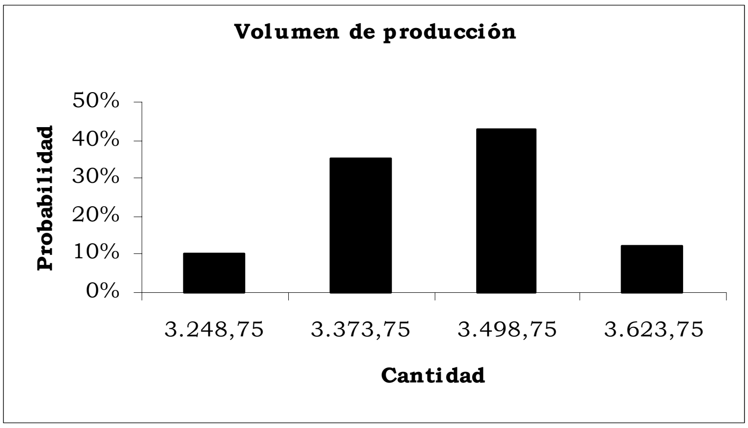
Supóngase que el precio de venta de este artículo es de $3.000. De modo que el ingreso bruto es: Unidades vendidas x precio unitario. Supóngase, además que las cantidades producidas han variado en la siguiente forma:

Producción (unidades) Punto medio	Frecuencia relativa %
3.248,75	10
3.373,75	35
3.498,75	43
3.623,75	12

De igual manera, como las probabilidades tienen dos cifras significativas, entonces se asignan 100 números de 00 a 99 (que tienen igual probabilidad de ocurrencia) en forma proporcional a la probabilidad. Observe la tabla y encontrará que para un evento con probabilidad de 10% hay asignados cuatro números (00 a 09).

Producción (unidades) Punto medio	Números aleatorios asignados
3.248,75	00-09
3.373,75	10-44
3.498,75	45-87
3.623,75	88-99

La distribución de probabilidad de esta variable se ve así:



El costo variable unitario es $1.000. Lo producido por encima de las ventas se considera una pérdida de $1.000 por unidad y las ventas no realizadas no acarrean pérdida. Las ventas perdidas son la diferencia entre la demanda (ventas) para el período y la cantidad producida.

Con base en los datos de las distribuciones de probabilidad, se puede determinar que el promedio de las ventas y de la producción es el mismo y vale 3,445.00. Si se trabajara con promedios, se tendría un ingreso neto al final de un año de:

($3.000 x 3.445- 3.445.000) = 3.445.00x 2.000 = $ 6.890.000

La rentabilidad promedio de esa inversión, en un año, sería de 57,43%.

Si se decide con esta información, como muchas veces se hace en la práctica, se podría concluir que si la tasa de descuento fuera 55%, este proyecto sería deseable. Miremos qué sucede si introducimos el riesgo de manera explícita a través de un proceso de simulación.

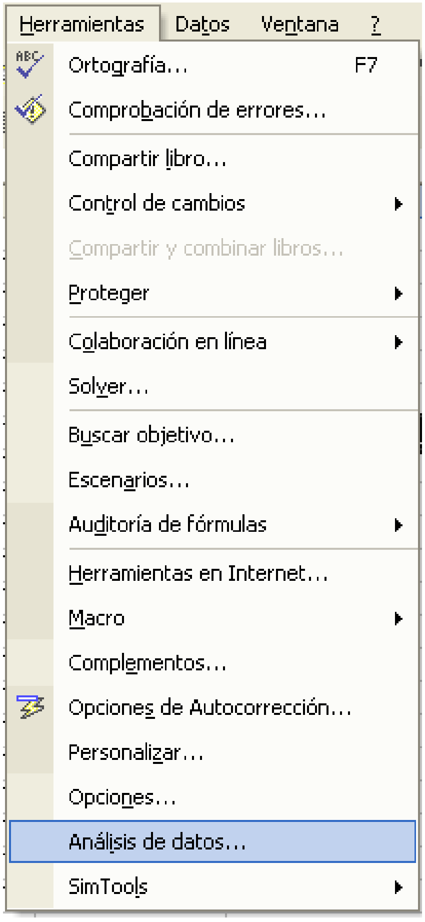
Antes de entrar a trabajar una simulación examinemos qué implicaciones tiene decidir con base en los promedios puede crear situaciones embarazosas. Por ejemplo, supongamos que usted es muy metódico y lleva un registro de lo que ha pagado por cada viaje ida y vuelta a una población cercana. Supongamos además que usted es una persona con mala suerte y tiene un percance (por ejemplo, se le desinfla una llanta o algo más grave) por cada viaje de ida y vuelta que hace. Entonces en uno de cada dos trayectos tiene un gasto extra de $25.000. Si los gastos cuando no le sucede ningún percance son de 25.000 y cuando tiene el percance son de $50.000 entonces, con base en sus datos su costo promedio es de $37.500. Como usted leyó en algún texto que debe utilizar los promedios para tomar decisiones, usted decide llevar a su próximo viaje $37.500 y le ocurrió un percance grave cuyo costo es de $25.000. ¿Habrá usted tomado una buena decisión al llevar sólo los $37.500? ¿Deberá tener en cuenta el hecho de la variación en los gastos y llevar un monto mayor ($50.000 en este caso)?

O el ejemplo del cazador que disparó dos veces: una vez diez metros a la izquierda del objetivo y otra vez diez metros a la derecha del objetivo. ¿Diría usted que en promedio ese cazador le dio al blanco correctamente? Claro que no. Sin embargo, cuando se decide con base en promedios se está comportando de manera similar al protagonista de estos dos ejemplos.

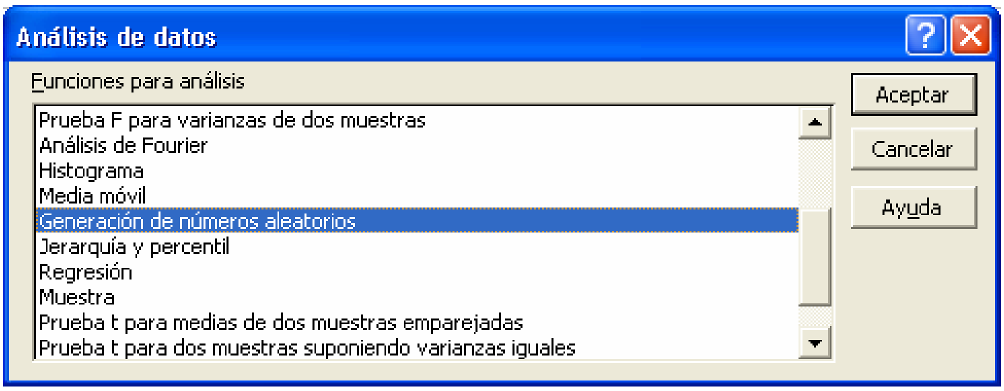
Si se ejecuta una simulación para analizar el efecto de la combinación de las variables, los resultados podrían ser diferentes, como se muestra más adelante. El ingreso bruto se calcula multiplicando la cifra de unidades vendidas por el precio de venta, si esta cifra es menor que la cifra correspondiente a la de unidades producidas. Si es mayor, la cifra que se multiplica por el precio de venta es la de unidades producidas.

Para nuestro ejemplo, si se supone que las ventas y la producción se comportarán en la misma forma como lo han hecho históricamente, se puede generar una muestra aleatoria. Si se desea que la probabilidad de ocurrencia sea proporcional a la frecuencia con que han ocurrido los valores, entonces, en el caso de la producción, la probabilidad de que ocurra un valor alrededor de 3.498,75 debe ser 4,3 veces mayor que la probabilidad de obtener un valor alrededor de 3.248,75.

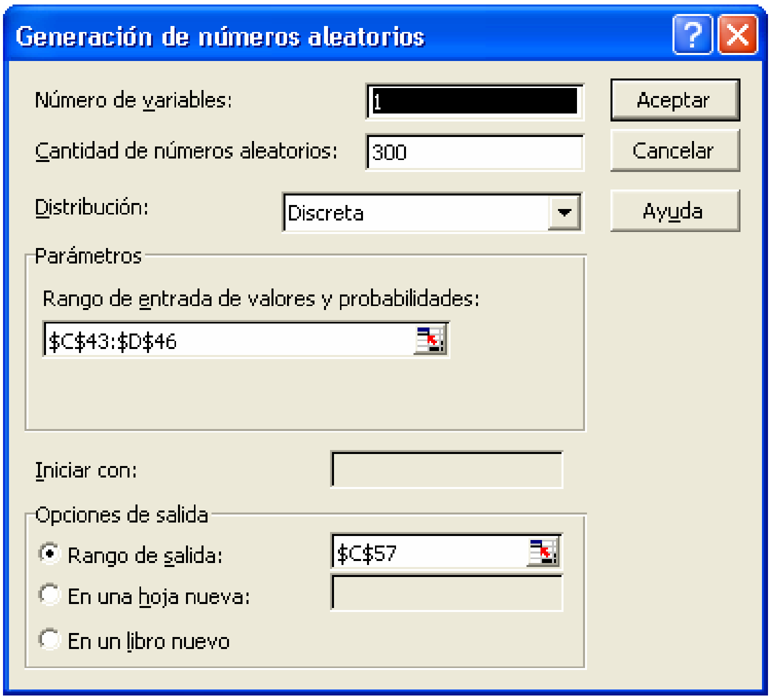
Podemos simular valores para calcular ciertos resultados como la TIR o el VPN. Esta simulación se puede hacer también con Generación de números aleatorios de Análisis de datos en la opción de menú Herramientas, de Excel.



Al oprimir la opción Análisis de datos aparece el siguiente cuadro de diálogo:



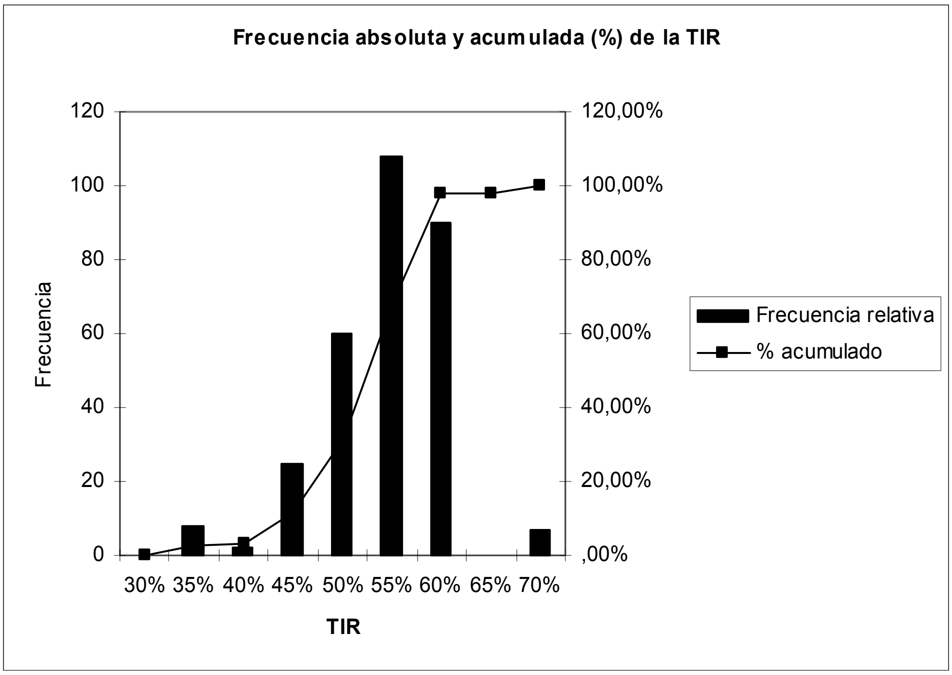
Y al escoger Generación de números aleatorios, aparece,



La distribución de frecuencia de los valores de rentabilidad calculados para 300 simulaciones es la siguiente:

Rentabilidad %	Frecuencia	% acumulado
30,0	0	0,00
35,0	8	2,67
40,0	2	3,33
45,0	25	11,67
50,0	60	31,67
55,0	108	67,67
60,0	90	97,67
65,0	0	97,67
70,0	7	100,00
Total	300	

En forma gráfica,



Obsérvese que la rentabilidad puede variar entre 30,00% y 70,00%. Esa información no se hubiera podido obtener si se trabaja con cifras promedios. Para tener una idea de cómo varía la TIR cuando se hace una simulación se presenta la tabla parcial de las simulaciones en la página siguiente.

Tabla de simulación (Ejemplo 4, primeras 50 simulaciones)

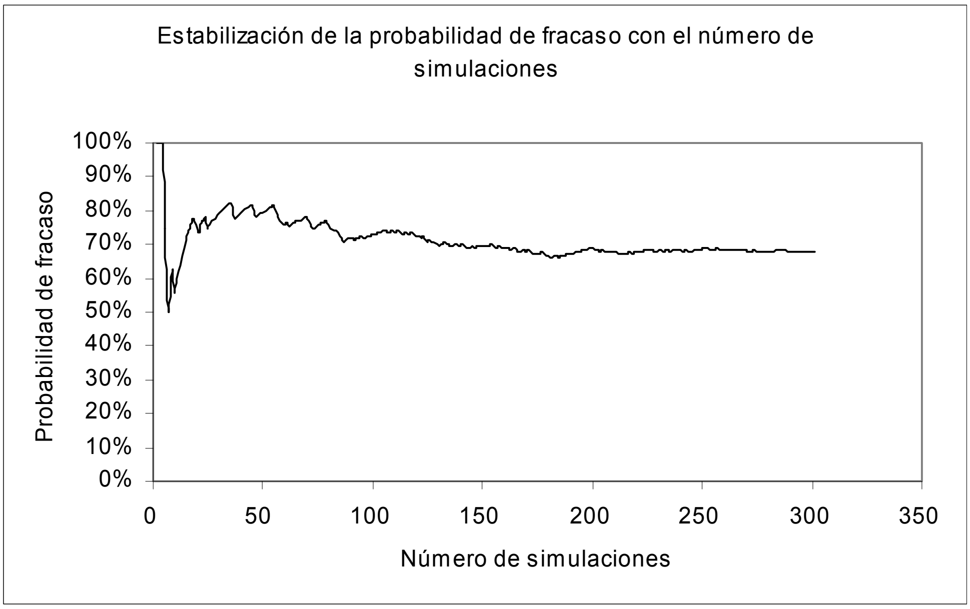
Simulación número	Demanda	Producción	Ingreso neto	TIR
1	3375	3498,75	6.626.250	51,46%
2	3250	3373,75	6.376.250	45,74%
3	3500	3248,75	6.497.500	48,51%
4	3625	3623,75	7.247.500	65,66%
5	3625	3498,75	6.997.500	59,94%
6	3625	3623,75	7.247.500	65,66%
7	3125	3498,75	5.876.250	34,31%
8	3375	3623,75	6.501.250	48,60%
9	3625	3498,75	6.997.500	59,94%
10	3250	3373,75	6.376.250	45,74%
11	3375	3623,75	6.501.250	48,60%
12	3250	3373,75	6.376.250	45,74%
13	3125	3248,75	6.126.250	40,03%
14	3250	3248,75	6.497.500	48,51%
15	3375	3498,75	6.626.250	51,46%
16	3125	3498,75	5.876.250	34,31%
17	3375	3498,75	6.626.250	51,46%
18	3375	3498,75	6.626.250	51,46%
19	3500	3498,75	6.997.500	59,94%
20	3375	3373,75	6.747.500	54,23%
21	3375	3373,75	6.747.500	54,23%
22	3375	3498,75	6.626.250	51,46%
23	3625	3373,75	6.747.500	54,23%
24	3500	3498,75	6.997.500	59,94%
25	3375	3373,75	6.747.500	54,23%
26	3375	3373,75	6.747.500	54,23%
27	3750	3248,75	6.497.500	48,51%
28	3625	3248,75	6.497.500	48,51%
29	3750	3373,75	6.747.500	54,23%
30	3375	3498,75	6.626.250	51,46%
31	3625	3373,75	6.747.500	54,23%
32	3250	3248,75	6.497.500	48,51%
33	3500	3373,75	6.747.500	54,23%
34	3625	3373,75	6.747.500	54,23%
35	3750	3498,75	6.997.500	59,94%
36	3500	3498,75	6.997.500	59,94%
37	3375	3498,75	6.626.250	51,46%
38	3500	3248,75	6.497.500	48,51%
39	3375	3248,75	6.497.500	48,51%
40	3500	3373,75	6.747.500	54,23%
41	3250	3498,75	6.251.250	42,89%
42	3250	3498,75	6.251.250	42,89%
43	3250	3498,75	6.251.250	42,89%
44	3375	3373,75	6.747.500	54,23%
45	3500	3623,75	6.876.250	57,17%
46	3500	3498,75	6.997.500	59,94%
47	3375	3373,75	6.747.500	54,23%
48	3750	3373,75	6.747.500	54,23%
49	3250	3498,75	6.251.250	42,89%
50	3375	3248,75	6.497.500	48,51%

Debe tenerse presente que este ejemplo es simple en extremo y que sólo se presenta con propósitos ilustrativos. El promedio de las rentabilidades simuladas es 52,90%. Es diferente de la que se calculó suponiendo que ocurrirían los promedios de ventas y producción; en ese caso no se reconocía la posibilidad de que existieran otros valores y posibles combinaciones entre ellos, ya que se supuso certeza absoluta del promedio. A partir de los datos obtenidos se puede calcular la desviación estándar de la rentabilidad, y calcular una medida aproximada de la probabilidad de que esa inversión produzca una rentabilidad mayor o menor que determinado valor.

Observe que tanto en la gráfica como en la tabla podemos calcular la probabilidad de que la TIR sea menor que la mínima aceptable (en este ejemplo, 55%). Esa probabilidad es de 68% aproximadamente. Esta medida, por aproximada que sea, es mejor guía para tomar una decisión que decir que la rentabilidad del proyecto es 57,49%, como sería el resultado al trabajar con promedios. Si se utilizó 55% como la tasa de descuento trabajando como si hubiera certeza (usando el valor esperado de la demanda y de la producción) entonces ese valor debe tener una prima de riesgo incluida. Como ya se ha introducido el riesgo de manera explícita, entonces debemos analizar la probabilidad de que la TIR sea mayor que el costo de capital sin esa prima de riesgo. Supongamos que costo promedio de capital es de 45% en lugar de 55%. En ese caso la probabilidad de que el proyecto sea un fracaso (TIR menor que 45%) será de casi 12%. Con esta información el decisor determinará si está dispuesto a asumir ese riesgo, en lugar de aceptar ciegamente que la TIR es de 57,49%, mayor que 55% y por lo tanto aceptar el proyecto como deseable.

¿Cuántas simulaciones hacer?

Una forma de saber cuándo "parar" una simulación es examinar el comportamiento del resultado que se desea simular. Cuando ese resultado se estabiliza, se puede considerar la posibilidad de detener el proceso de simulación. En el ejemplo anterior, la probabilidad de fracaso tiene el comportamiento que aparece en la figura



En este ejemplo y para una tasa de descuento de 55%, la estabilización del resultado se logra a partir de la simulación 193 y los valores de la probabilidad de fracaso tienden a 68%.

Una forma más rigurosa de hacer el cálculo estadístico del tamaño adecuado de la muestra es calcular la varianza del resultado (probabilidad de fracaso) para un cierto número de simulaciones (por ejemplo, para 1,000); esta varianza se podría calcular para 30 corridas de 1,000 simulaciones y con esos datos estimar la varianza. Si se supone que la distribución de esa probabilidad fuera normal, se define un nivel de confianza, -por ejemplo, 1% o 5%- y con base en esa cifra se calcula la z de la distribución normal. Así mismo, se estima el error absoluto que se está dispuesto a aceptar, en este caso el número de puntos en porcentaje. Con estos datos se estima el tamaño de la "muestra" o sea, el número de simulaciones que debe hacerse. La forma de calcular n es la siguiente:

$$n = \frac{z^2 \times \sigma^2}{e^2}$$

donde

n = tamaño de la muestra

z = variable normal con μ = 0 y σ = 1, para un nivel de confianza deseado

e = error absoluto aceptado

Por ejemplo, si se estipularan los siguientes parámetros para el ejemplo anterior, se tendría:

Z para 2%	2,32634193
e	0,07%
σ	0,488%
n	263,153901

O sea que el resultado de la simulación con unos 300 ensayos sería aceptable. El número de simulaciones realizadas para calcular la "estabilización" de la probabilidad de fracaso fue de 300.

Ejemplo 6

Con los supuestos y datos del ejemplo utilizado para ilustrar la construcción del flujo de caja de un proyecto en el capítulo 6 del libro *Decisiones de inversión*[5], se hizo una simulación para algunas variables: Aumento en precios de venta, en precios de compra, en volumen de ventas y tasa de inflación. Con un esquema similar se ha construido otro ejemplo similar.

Se supuso que las cuatro variables eran independientes, excepto el volumen de ventas, el cual está relacionado con los precios por una función de elasticidad.

Las distribuciones utilizadas y los resultados de la simulación fueron los siguientes:

Distribución de probabilidad de tres variables

Venta	Probabilidad	Compra	Probabilidad	Unidades	Probabilidad
25,0%	5,0%	20,0%	10,0%	4,0%	5,0%
26,0%	10,0%	21,0%	15,0%	5,0%	15,0%
27,0%	25,0%	22,0%	35,0%	6,0%	30,0%
28,0%	40,0%	23,0%	25,0%	7,0%	35,0%
29,0%	20,0%	24,0%	15,0%	8,0%	15,0%

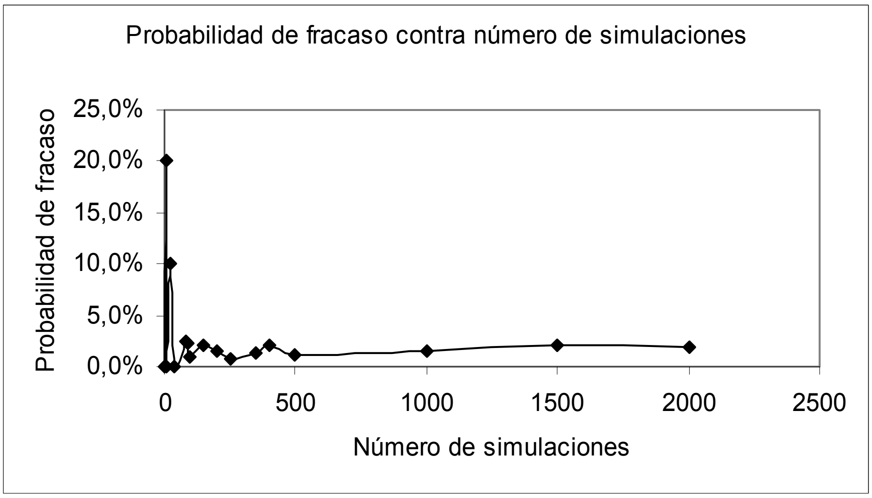
Los resultados del comportamiento de la probabilidad de fracaso con respecto del número de simulaciones fue:

No de simulaciones	Probabilidad de fracaso
1	0,0%
5	20,0%
10	0,0%
20	10,0%

[5] Este ejemplo se puede bajar de www.poligran.edu.co/decisiones. El archivo se llama Simulación.xls.

40	0,0%
80	2,5%
90	2,2%
100	1,0%
150	2,0%
200	1,5%
250	0,8%
350	1,4%
400	2,0%
500	1,2%
1.000	1,6%
1.500	2,1%
2.000	1,8%

En forma gráfica,



En la tabla y gráfica anteriores, se puede observar que a partir de 350 simulaciones la probabilidad de fracaso se encuentra alrededor de 1,4%-2,1%.

Por ejemplo, si se estipularan los siguientes parámetros para el ejemplo anterior, se tendría:

Z para 2%	2,32634193
e	0,25%
σ	2,00%
n	346

O sea que una corrida de 350 simulaciones proporcionaría un buen estimado de la probabilidad de fracaso.

El programa utilizado está disponible. Los interesados pueden obtenerlo en www.poligran.edu.co/decisiones en la opción *Ejemplos* y *ejercicios*.

¿Cuáles variables incluir en una simulación?

Aunque en los ejemplos que se han presentado se sugiere que la simulación es simple y barata, esto no es siempre cierto. Los costos actuales sí son mucho menores que los de hace treinta o más años. Los recursos computacionales son cada vez más baratos, pero a la vez ello mismo hace posible la consideración de modelos más complejos. Por el otro lado, es necesario investigar sobre el comportamiento de y la relación entre las variables. Es necesario identificar las correlaciones o relaciones de independencia o dependencia entre las variables.

Lo deseable es que el número de variables aleatorias que se simulen sea relativamente bajo y que sean estadísticamente independientes. Estas relaciones deben establecerse dentro del modelo por medio de relaciones matemáticas.

¿Cómo identificar entonces las variables que se deben simular? Esto es relativamente sencillo. Se debe hacer lo que se conoce como análisis de sensibilidad.

El análisis de sensibilidad consiste en hacer variar todas las variables independientes un mismo porcentaje, una por una, y examinar y registrar la variación en nuestro resultado, por ejemplo, el VPN. Una vez obtenidas las variaciones del resultado se ordenan por su valor absoluto y las variables que más hagan variar el resultado final serán las variables más críticas. Esas variables más críticas serán las candidatas a ser simuladas.

Un criterio para determinar qué variables son críticas es decir que aquellas que hagan variar el resultado final en un porcentaje mayor que el aplicado a la variable serán críticas.

Por ejemplo, supongamos que se tienen ciertas variables y que se ha aplicado una variación de 1% a cada una de ellas (una por una). Esto es, que se cambia el valor de la variable en 1% y se registra el porcentaje de variación en el resultado. Se restaura el valor original y se varía en 1% la siguiente variable. Se registra la variación en el resultado. Y así sucesivamente.

Análisis de sensibilidad de las variables una a la vez

Variable	Variación en el VPN	Valor absoluto
Aumentos en precios de compra	-2,14%	2,14%
Precio de venta inicial	4,64%	4,64%
Aumentos en precios de venta	2,93%	2,93%
Honorarios mensuales	-0,06%	0,06%
Aumentos en honorarios	-0,04%	0,04%
Gastos generales mensuales	-0,22%	0,22%
Aumentos en gastos generales	-0,17%	0,17%
Tasa de inflación	-0,25%	0,25%
Aumento en salarios	-0,36%	0,36%
Comisiones sobre ventas	-0,28%	0,28%
Prestaciones sobre salarios y comisiones.	-0,27%	0,27%
Publicidad (% sobre ventas)	-0,18%	0,18%
Capital invertido en dinero	-1,25%	1,25%
Valor de los activos fijos	0,19%	0,19%
Política de cartera	1,17%	1,17%
Política de pagos	-0,51%	0,51%
Aumentos en nivel de ventas	0,82%	0,82%
Tasa de descuento real	-0,54%	0,54%
Tasa de impuestos	-0,80%	0,80%
Salarios de la administración	-0,37%	0,37%
Salarios de ventas (básico)	-0,09%	0,09%

Al ordenar por su valor absoluto se tiene

Variable	Variación en el VPN	Valor absoluto
1. Precio de venta inicial	4,64%	4,64%
2. Aumentos en precios de venta	2,93%	2,93%
3. Aumentos en precios de compra	-2,14%	2,14%
4. Capital invertido en dinero	-1,25%	1,25%
5. Política de cartera	1,17%	1,17%
6. Aumentos en nivel de ventas	0,82%	0,82%
7. Tasa de impuestos	-0,80%	0,80%
8. Tasa de descuento real	-0,54%	0,54%
9. Política de pagos	-0,51%	0,51%
10. Salarios de la administración	-0,37%	0,37%
11. Aumento en salarios	-0,36%	0,36%
12. Comisiones sobre ventas	-0,28%	0,28%
13. Prestaciones sobre salarios y comisiones.	-0,27%	0,27%
14. Tasa de inflación	-0,25%	0,25%
15. Gastos generales mensuales	-0,22%	0,22%
16. Valor de los activos fijos	0,19%	0,19%
17. Publicidad (% sobre ventas)	-0,18%	0,18%
18. Aumentos en gastos generales	-0,17%	0,17%
19. Salarios de ventas (básico)	-0,09%	0,09%
20. Honorarios mensuales	-0,06%	0,06%
21. Aumentos en honorarios	-0,04%	0,04%

Al examinar las variables más críticas (aquellas que hacen variar el VPN más de 1%) encontramos que sólo hay cinco. Por lo tanto, éstas serían las candidatas para ser simuladas.[6]

¿Por qué nos interesa el valor absoluto de la variación del VPN? Porque para nosotros es tan importante una variación positiva o una negativa. Nos interesa la variación en sí misma, no su sentido, hacia arriba o hacia abajo.

[6] El criterio aquí esbozado no puede tomarse como único. Bien podría el analista considerar, por ejemplo, como críticas aquellas variables que al variar 1% hagan variar el VPN en más de 0,75%. Si ese fuera el criterio, entonces en nuestro ejemplo las variables críticas serían las siete primeras.

Cómo tomar decisiones con información probabilística

Fundamentalmente lo que buscamos con la simulación es encontrar la distribución de probabilidad de un resultado, por ejemplo, el VPN. Tener la distribución de probabilidad implica conocer su valor esperado y su varianza (o desviación estándar). Con esta información a la vez obtenemos la probabilidad de fracaso.

Una vez que se ha obtenido la probabilidad de que un proyecto sea bueno o malo, poco se puede decir sobre el curso de acción que debe emprender el decisor, puesto que es el individuo en forma subjetiva quien decide si una probabilidad de fracaso es alta o baja. O sea que el decisor deberá discernir en forma subjetiva si un proyecto con una determinada probabilidad de fracaso y con determinado valor esperado, debe considerase aceptable o no.

Sin embargo, lo anterior es relativamente fácil si se trata de aceptar o rechazar un proyecto. En el caso de proyectos mutuamente excluyentes, el decisior deberá seleccionar entre los ya aceptados por él de manera subjetiva el "mejor" entre todos. Aquí se puede utilizar una ayuda de tipo "objetivo" o cuantitativo.

Hay algunos criterios obvios cuando se dan ciertas condiciones. Por ejemplo, si el máximo resultado de la simulación es indeseable, pues el proyecto se rechaza abiertamente. Si el peor resultado es aceptable se acepta. La dificultad estriba en las situaciones indeterminadas. Esto es, cuando existe una probabilidad de que los proyectos resulten un fracaso. Por ejemplo, ¿qué decir entonces de un proyecto A con VPN esperado de $10.000.000 con probabilidad de fracaso de 5,06% y una desviación estándar de 6.100.000, comparado con un proyecto B de $20.000.000 de VPN esperado pero con 10,14% de probabilidad de fracaso y una desviación estándar de 15.700.000? Para estos casos se puede sugerir el siguiente procedimiento heurístico (por ser heurístico no siempre se escoge el mejor):

Seleccione el proyecto con mayor Coeficiente de Variación Probabilística (CVP):

$$CVP = \frac{\overline{VPN}}{\sigma} \tag{5.4a}$$

o

$$CVP = \frac{\overline{VPN}}{\sigma \times P} \tag{5.4b}$$

Donde:

$\overline{VPN}$ = Valor esperado del VPN del proyecto.

σ = Desviación estándar de la distribución del VPN del proyecto.

P = Probabilidad de fracaso del proyecto.

En el ejemplo planteado, se tiene para el proyecto A

$$\text{Proyecto A} = \frac{10.000.000}{6.100.000} = 1{,}64$$

ó

$$\text{Proyecto A} = \frac{10.000.000}{6.100.000 \times 5{,}06\%} = 32{,}42$$

Para el proyecto B

$$\text{Proyecto B} = \frac{20.000.000}{15.700.000} = 1{,}27$$

ó

$$\text{Proyecto B} = \frac{20.000.000}{15.700.000 \times 10{,}14\%} = 12{,}57$$

En resumen

VPN esperado	σ	P	VPN/σ	VPN/Pσ
10.000.000	6.100.000,00	5,06%	1,64	32,42
20.000.000	15.700.000,00	10,14%	1,27	12,57

En este caso se podría escoger el proyecto A aunque su VPN esperado sea menor que el de B. Para entender la dificultad planteada aquí, se debe considerar el aspecto relacionado con las actitudes hacia el riesgo tratadas en capítulo sobre teoría de la utilidad.

Otro análisis de los resultados consiste en examinar el valor absoluto esperado de las pérdidas previstas para el proyecto y compararlo con el valor esperado de las ganancias. Esto es,

$$\text{Razón de pérdidas esperadas} = \frac{|\text{Valor esperado de las pérdidas}|}{\text{Valor esperado de las ganancias}}$$

Se puede observar que este indicador tiene un valor máximo de infinito (∞), lo cual significa que sólo hay pérdidas o cero, lo cual significa que no hay pérdidas. Por lo tanto, este indicador es favorable mientras más cercano esté a cero. Si en el ejemplo del perecedero presentado arriba se hubiera calculado el VPN con la tasa de 45%, se obtendrían los siguientes resultados:

VPN	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Valor esperado por rango
-450.000	0	0,0%	-
-300.000	8	2,7%	-8.000
-150.000	5	1,7%	-2.500
-	22	7,3%	-
150.000	60	20,0%	30.000
300.000	108	36,0%	108.000
450.000	15	5,0%	22.500
600.000	75	25,0%	150.000
750.000	7	2,3%	17.500
Total	300	Valor esperado	317.500

Modificamos estos valores del VPN y utilizamos el punto medio del rango, así:

VPN	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Valor esperado por rango
-375.000	8	2,7%	-10.000
-225.000	5	1,7%	-3.750
-75.000	22	7,3%	-5.500
75.000	60	20,0%	15.000
225.000	108	36,0%	81.000
375.000	15	5,0%	18.750
525.000	75	25,0%	131.250
675.000	7	2,3%	15.750
Total	300	Valor esperado	242.500

El valor esperado por rango resulta de multiplicar el VPN indicado por la probabilidad. Por ejemplo, -375.000x2,7% = -10.000.

La suma de los valores negativos de la última columna resulta en el valor esperado de las pérdidas, en este caso -19.250, y su valor absoluto es 19.250. La suma de los valores positivos es el valor esperado de las ganancias, en este caso 261.750.

La razón de pérdidas esperadas es 0,0735. Este indicador sirve para comparar alternativas mutuamente excluyentes.

Este indicador también se puede calcular como

$$\text{Razón de pérdidas esperadas} = \frac{|\text{Valor esperado de las pérdidas}|}{\text{Valor esperado de las ganancias} + |\text{Valor esperado de las pérdidas}|}$$

Cuando se usa esta fórmula el valor oscila entre cero y 1. Nuevamente, mientras más cerca de cero esté será mejor en términos de riesgo. En el caso de ejemplo aquí estudiado, el valor de este índice sería de 0,0794.

Una posibilidad adicional para enfrentar la decisión bajo incertidumbre es aproximarse al problema por medio de la teoría de la utilidad cardinal, presentada en un capítulo anterior. Si se utiliza la misma distribución de probabilidad del VPN presentada arriba para el ejemplo del perecedero, se tiene, ya agrupada por los mismos rangos y utilizando una función de utilidad igual a[7]

$y = -(6E\text{-}12)x^2 + (1E\text{-}05)x + 9.5726$

donde

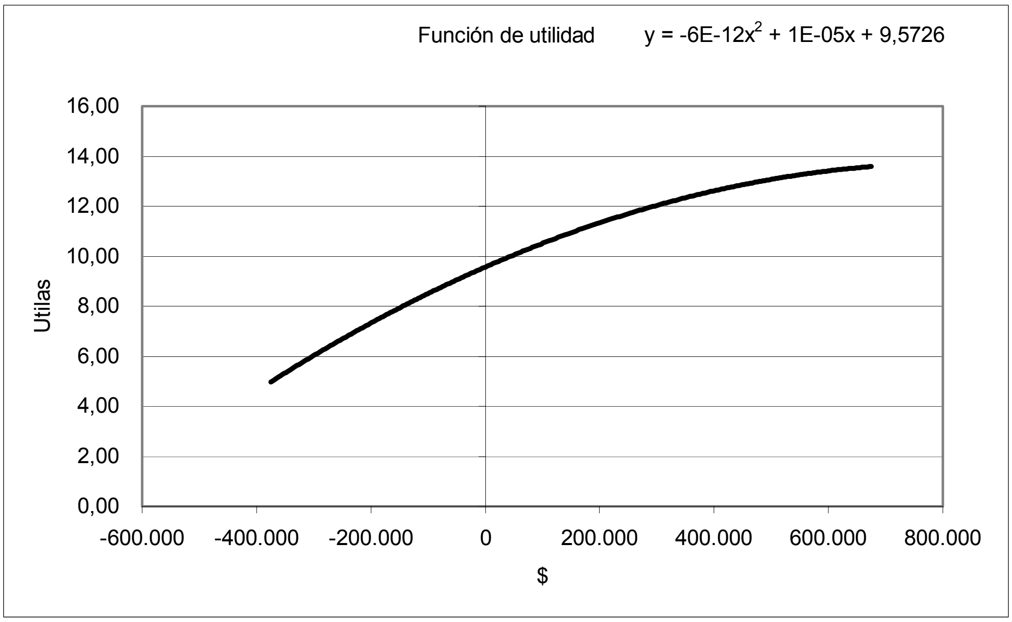
y = utilas o medida de utilidad cardinal

x = monto en dinero

En este caso se tiene lo siguiente:

[7] Se debe recordar que la expresión 6E-12 significa un 6 dividido por un 1 con doce ceros a la derecha.

Resultados VPN a 45%	Probabilidad	Función de utilidad	Utilidad esperada
-375.000	2,7%	4,98	0,13
-225.000	1,7%	7,02	0,12
-75.000	7,3%	8,79	0,64
75.000	20,0%	10,29	2,06
225.000	36,0%	11,52	4,15
375.000	5,0%	12,48	0,62
525.000	25,0%	13,17	3,29
675.000	2,3%	13,59	0,32
		Utilidad esperada	11,33
		Equivalente Cierto	199.639



Para el decisor con la función de utilidad indicada, la inversión en el perecedero tendrá un equivalente cierto de 199.639. Recuérdese que el valor esperado era de 242.500.

Se hubiera podido calcular directamente la utilidad de cada resultado de las 300 simulaciones. En ese caso, la utilidad esperada hubiera sido 11,38 y el equivalente cierto 205.653.

El lector puede comprobar que si la tasa de descuento hubiera sido de 55%, el equivalente cierto resultante hubiera sido de -113.519,68 (su resultado no será idéntico a éste, puesto que se está trabajando con números aleatorios). Al haber simulado los 300 VPNs se encuentra que el valor esperado del VPN sería negativo, -59.401.

Entonces, en el ejemplo del perecedero, si la tasa de descuento es de 45%, se aceptaría y si es de 55% se rechazaría utilizando la simulación y el enfoque de la teoría de la utilidad. Esta situación de decisión dista mucho de la que se presentó al inicio de este capítulo cuando se trabajó con el promedio de la producción y de la demanda. En aquel caso, utilizando 55% como tasa de descuento se hubiera aceptado. Por supuesto que si en ese caso se hubiera utilizado 45% de tasa de descuento se hubiera aceptado también.

Resumen

En este capítulo se estudia el análisis del riesgo en las inversiones. Esto es, se trabaja con distribuciones de probabilidad. El primer enfoque que se presenta es el de *Hillier* que permite hacer un cálculo analítico de la probabilidad de éxito o fracaso de un proyecto. Debido a las condiciones tan estrictas para poder aplicar el Teorema del límite central, base del procedimiento analítico, se estudia el *proceso de simulación de Monte Carlo*. Se ilustra el método con un ejemplo muy sencillo. Este ejemplo se analiza primero con base en cifras promedio y resulta que el proyecto del ejemplo debe aceptarse; después se trabaja la simulación, en *Excel*, y se encuentra que la probabilidad de fracaso de ese ejemplo es muy alta.

Se presentan los resultados de una simulación amplia, basada en el ejemplo que se utilizó en el capítulo 6 del libro *Decisiones de inversión*, para ilustrar la construcción del flujo de caja.

También se presentan algunas ayudas para seleccionar entre alternativas mutuamente excluyentes en situación de riesgo y el uso, con el mismo ejemplo, de la teoría de la utilidad para la toma de decisiones.

Referencias

Bierman, H., Hausman, W.H., "The Resolution of Investment Uncertainty through Time", en *Management Science*, Vol. 18, No. 12, agosto, 1972.

Brealey, R. and Myers, S. (2000). *Principles of Corporate Finance*, *6th Edition* (McGraw Hill). Hay traducción al español de la 5ª edición con el nombre de Principios de Finanzas corporativas, McGraw Hill, 1996.

Eilon, S. "What is a Decision?", en *Management Science*, Vol.16, No. 4, diciembre de 1969., p.p. 172-189 .

Hertz, D.B., "Risk Analysis in Capital Investment", en *Harvard Business Review*, Vol. 42, No. 1, 1964, p.p. 95-106.

Hespos, R.F., P.A. Strassman, "Stochastic Decision Trees for the Analysis of Investment Decisions", en *Management Science*, Vol. 11, No. 10, agosto de 1965.

Hillier, F.S., G.J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, 3ª edición, Holden-Day, Inc., 1980. Hay traducción al español, Introducción a la investigación de operaciones, 1982, McGraw-Hill.

Hillier, F.S., "The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments", en *Management Science*, Vol. 9, No.3, 1963, p.p. 443-457.

Raiffa, H., *Decision Analysis - Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty*, Massachusetts, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, 1968.

Ross, Stephen A., Randolph W. Westerfield y Jeffrey Jaffe, *Corporate Finance*, 5ª edición, 1999, Irwin-McGraw-Hill

Savvides, Savvakis C., Risk Analysis in Investment Appraisal, *Project Appraisal Journal*, Volume 9 Number 1, pages 3-18, March 1994. Disponible como Working paper en Social Science Research Network.

Vélez Pareja, Ignacio y Joseph Tham, *Nota sobre el costo promedio de capital*, en *La medición del valor y del costo de capital en la empresa*, Monografías No 62, Serie de Finanzas, Facultad de Administración de la Universidad de los Andes, julio 2002, pp. 61-98.

Wilson, R. "Investment Analysis Under Uncertainty", en *Management Science*, Vol. 15, No. 12, 1969, p.p. 650-664.

Ejercicio de autocorrección

Suponga que un evento cualquiera tiene la siguiente distribución de probabilidad:

Valor del evento	Probabilidad
1.000	15%
2.000	20%
3.000	45%
4.000	20%

Con los números aleatorios que se indican a continuación en negrilla, simule diez observaciones aleatorias del evento y calcule su valor esperado:

468	141	037	039	458	816
462	931	455	345	824	448
446	857	303	846	627	520

Solución al ejercicio de autocorrección

Valor del Evento	Probabilidad	Números aleatorios
1.000	15%	00-14
2.000	20%	15-34
3.000	45%	35-79
4.000	20%	80-99

Para la simulación se utilizan los números aleatorios hacia la derecha, a partir del número 8 que se muestran en negrilla.

468	141	037	039	458	816
462	931	455	345	**8**24	448
446	857	303	846	627	520

Número aleatorio	Observación
82	4,000
44	3,000
48	3,000
44	3,000
68	3,000
57	3,000
30	2,000
38	3,000
46	3,000
62	3,000

Valor esperado: 30.000/10 = 3.000

Ejercicios

1) Con los datos del ejemplo utilizado para ilustrar el método de simulación, calcule el *Valor Presente Neto* de la inversión a la tasa de 55%, y encuentre la distribución

probabilidad para rangos de VPN definidos por los valores extremos de los intervalos utilizados para la tasa interna de rentabilidad.

2) Repita el ejercicio anterior con una tasa del 30%.

3) Suponiendo las siguientes distribuciones para las diferentes variables, simule 50 ensayos y calcule la distribución de la TIR. ¿Cuál es la probabilidad de que el VPN sea menor que cero 30%? Dibuje la gráfica de la distribución resultante.

Inversión inicial		Valor de salvamento	
(millones)		(millones)	
Valor	Probabilidad	Valor	Probabilidad
500	0,3	50	0,15
600	0,4	60	0,60
700	0,3	70	0,25

Ingreso bruto		Egresos anuales	
(millones)		(Millones)	
Valor	Probabilidad	Valor	Probabilidad
300	0,20	75	0,20
350	0,35	100	0,35
400	0,25	125	0,25
450	0,20	150	0,20

Resuelva el ejercicio suponiendo que la vida del proyecto es de 6 años, y para cada año simule ingresos y egresos.

4) Resuelva el ejercicio 3) simulando un ingreso y un egreso. Suponga que el ingreso y el egreso simulados son constantes durante la vida del proyecto.

5) Igual al ejercicio 3) pero calculando la TIR y encontrando la probabilidad de que ésta sea menor que 25%. Halle también la probabilidad de que la TIR se encuentre entre 20% y 30%.

6) Resuelva el ejercicio 3) por el método de *Hillier*.

7) Laboratorios de productos farmacéuticos especiales podría invertir en la elaboración de una nueva droga que tiene una vida estimada de 3 años. Si la demanda durante el primer año es favorable, seguro que será favorable durante los siguientes dos años; si la demanda es baja, será baja durante los siguientes años. Debido a este comportamiento de la demanda se puede decir que están perfectamente correlacionadas. El costo del proyecto es de $100 millones de pesos y los posibles flujos de caja en millones de pesos, son los siguientes:

Año 1		Año 2		Año 3	
Prob,	Flujo	Prob	Flujo	Prob	Flujo
0,10	0	0,15	10	0,15	0
0,20	20	0,20	40	0,20	15
0,40	40	0,30	70	0,30	30
0,20	60	0,20	100	0,20	45
0,10	80	0,15	130	0,15	60

Si se supone que la tasa de descuento libre de riesgo es de 25% anual, calcule:

a) El valor esperado y la desviación estándar de la distribución de probabilidad del VPN.

b) Si se supone que la distribución del VPN es normal, ¿cuál es la probabilidad de que el VPN sea menor que cero?; ¿mayor que $30 millones y menor que $100 millones?

c) Asigne los números aleatorios que sean necesarios para cada distribución y simule tres resultados posibles; con estos resultados calcule el VPN al 25%.

Ayuda: Los flujos de caja están perfectamente correlacionados, por lo tanto, la desviación estándar se puede calcular como el valor presente de las desviaciones estándar de cada flujo.

8) Si se hace una inversión de $10 millones y al año se reciben los siguientes beneficios netos con estas probabilidades:

Ingreso neto	Probabilidad
10	15%
20	25%
30	30%
40	20%
50	10%

Asigne los números aleatorios a cada nivel de ingreso, genere diez observaciones aleatorias, calcule el VPN al 45% y estime la probabilidad de que el VPN sea negativo.

9) La Compañía Huzuki produce desde cámaras fotográficas hasta barcos. Se desea analizar un problema de la sección de productos fotográficos. Pronto descontinuarán un viejo modelo y ahora investigan qué hacer con la capacidad productiva extra que quedará disponible. La primera alternativa es la de expandir la producción del modelo *A*, uno de los más nuevos y populares. Este modelo se lanzó al mercado el año pasado y su gran acogida indica que aún hay mercado para la producción adicional. La segunda alternativa consiste en iniciar la producción del modelo *B*. Este último modelo implica una serie de cambios revolucionarios recientemente ideados por el grupo de investigación. Aun cuando no hay ningún modelo comparable en el mercado, existen rumores de que otros competidores tienen modelos similares en diseño. La investigación de mercado revela perspectivas excitantes, pero muy inciertas para el nuevo modelo. Además, se presenta cierta

incertidumbre adicional debida a la confiabilidad de las piezas nuevas, la falta de experiencia en producción, y la posibilidad de que el mercado se vea invadido por modelos competitivos en cualquier instante. Debido a la falta de fondos para inversión se ha decidido que sólo una de esas alternativas se puede llevar a cabo. Se supone que la producción de *B* no afectaría el mercado de la producción de *A*.

Se han hecho estudios detallados de las consecuencias, en términos de flujo de caja después de impuestos, para las dos alternativas. El análisis de la inversión requerida en el modelo *A* indica que se necesitará nuevo equipo y herramientas, además de modificaciones en lo existente. La inversión en *A* sería de $400.000. Se reconoce sin embargo, que esa estimación es aproximada, de manera que resultó apropiado calcular su desviación estándar: Un valor de $20.000 se consideró lo más apropiado. En forma similar se estimaron los valores esperados y desviaciones estándar de los flujos netos de caja en los próximos 5 años. Debido a al experiencia previa con el modelo *A*, esas desviaciones son pequeñas, y en parte se deben a variaciones posibles en los precios de los insumos a la producción. Como esas condiciones varían al azar de año en año, se decidió que la suposición apropiada era la de que los flujos de caja en años sucesivos son mutuamente independientes. No obstante se encontró un pequeño problema al determinar la desviación estándar en el quinto año, porque ese flujo de caja combina el valor de ingreso regular de ese año con el valor de salvamento. La desviación se calculó suponiendo independencia, de manera que la varianza de la suma iguala a la suma de las varianzas de esos flujos de caja. La tabla siguiente resume los resultados de los cálculos para el modelo *A* (en miles de pesos):

Año	Valor esperado	Desviación estándar
0	-400	20
1	+120	10
2	+120	15
3	+120	20
4	+120	30
5	+120	50*

* $=[30^2 + 40^2]^{1/2}$

El procedimiento para el modelo *B* es similar. La diferencia resulta de la incertidumbre sobre la recepción del modelo *B* en el mercado. Se cree que si esa acogida excede a lo esperado en los dos primeros años, así continuarán las cosas de ahí en adelante, y viceversa. Por otra parte, el análisis de los gastos de producción ha llevado a la conclusión de que cualquier desviación de lo esperado en costos de producción es independiente de las desviaciones en otros períodos.

El flujo de caja de los costos se supone independiente de todos los otros factores, y en ese flujo se incluyó el valor de salvamento en el último año. Un análisis detallado de los diversos componentes del flujo de caja, ha llevado a hacer estimativos de las desviaciones de los flujos netos de caja de los dos componentes del flujo total. Los resultados se presentan en la tabla siguiente (miles de pesos):

Año	Flujo de caja	Valor esperado	Desviación Estándar
0	Inversión Inicial	-600	50
1	Producción	-250	20
2	Producción	-250	20
3	Producción	-200	10
4	Producción	-200	10
5	Producción y salvamento	-100	10
1	Ventas	300	50
2	Ventas	600	100
3	Ventas	500	100
4	Ventas	400	100
5	Ventas	300	100

La tasa de descuento de la firma, libre de riesgo, es de 10% anual.

A- ¿Cuál es la distribución de la probabilidad del valor presente neto de la inversión en cada una de las alternativas?

B- ¿Cuál es la probabilidad de pérdida total para cada alternativa?

C- ¿Cómo cree usted que la *Huzuki* decidirá entre los dos modelos? Considere el problema de una Compañía que desea saber si debe abrir ventas de un cierto producto en un nuevo territorio.

10. Se ha propuesto construir una fábrica de hielo. Sin embargo, se han identificado varios factores climáticos que inciden sobre el consumo de este artículo, y de acuerdo con series históricas se han determinado los siguientes eventos, de los cuales, a su vez, se desprenden los flujos de caja detallados.

Evento	Probabilidad	Flujo de caja
Año 1		
A_1	0,4	10.000
B_1	0,3	12.000
C_1	0,11	16.000
D_1	0,2	3.000
Año 2		
A_2	0,6	22.000
B_2	0,1	1.000
C_2	0,2	15.000
D_2	0,1	4.000

Si se requiere una inversión de $15.000, y la tasa de descuento es del 12%, ¿Valdría la pena?

11) Suponga que la tasa de descuento es igual a la tasa de oportunidad. Explique qué tasa de descuento deberá ser utilizada si usted está haciendo el análisis de una inversión bajo riesgo, y ha calculado explícitamente las distribuciones de probabilidad de algunas variables para hacer una simulación de Monte Carlo. Suponga que tiene dos estimativos del costo de oportunidad: Uno es 30% anual, y corresponde a unos bonos emitidos por el Banco de la República de Colombia, y el otro es 35,5% anual y corresponde a unos bonos emitidos por una empresa metalúrgica colombiana.

12. En un artículo (Smith, D. J., "Incorporating Risk into Capital Budgeting Decisions Using Simulation", *Management Decision*, 32, 9, 1994, p.p. 20-26), el autor afirma que "típicamente, se puede esperar que los flujos de caja tengan una distribución normal", y con base en ello propone que las simulaciones de los flujos de caja se realicen con la siguiente expresión:

Media de la distribución + Desviación estándar x (número aleatorio$_1$+ número aleatorio$_2$ + número aleatorio$_3$ + número aleatorio$_4$... + número aleatorio$_{12}$ –6)

Con base en lo estudiado en este capítulo critique el planteamiento de *Smith*. Como guía a su crítica reflexione sobre las siguientes preguntas: Si la simulación es una técnica apropiada para analizar problemas cuando la distribución de probabilidad de las variables no está definida como una de las distribuciones conocidas (por ejemplo, cuando no es normal, o binomial, etc.), ¿valdrá la pena simular en este caso?; ¿habrá una forma analítica de resolver el problema? (una forma analítica de resolver un problema es desarrollarlos con base en fórmulas; en este caso, se trata de encontrar la probabilidad de fracaso del proyecto). Explique su análisis y crítica de esta afirmación en no más de 100 palabras. No haga cálculos, sólo explique lo que haría.