

Árboles de decisión

“Creo que nunca podré ver un poema tan bello como un árbol”.

Joyce Kilmer

“Las hojas tuyas, di, árbol son verdes, estás seguro?”

Qué alegría te corona por la mañana , a las once, cuando ya no hay dudas y todos dicen: “Qué verde está el árbol”

Pedro Salinas

*“No podrás saber nada, sauce triste!
!Tú que desmelenado sobre el agua te inclinas e interrogas sin saber nunca lo que el agua dice al pasar junto a ti”*

Pedro Salinas

Se han desarrollado muchas técnicas para facilitar el proceso de decisión en la organización. Este desarrollo se ha producido en virtud del problema del desconocimiento del futuro, por lo menos hasta nuestros días. Una de estas técnicas de ayuda es comúnmente conocida como *árboles de decisión*. Esta técnica es un método conveniente para presentar y analizar una serie de decisiones que se deben tomar en diferentes puntos de tiempo.

Las ideas básicas de la técnica de árboles de decisión

Aunque el enfoque de árboles de decisión fue utilizado dentro del contexto de la teoría de la probabilidad, *Magee* fue el primero en utilizar el concepto para tratar el problema de las decisiones de inversión de capital. Posteriormente *Hespos* y

Strassmann propusieron, con algún detalle, combinar el análisis del riesgo, propuesto por *Hertz* y *Hillier*, con la técnica de los árboles de decisión (debe aclararse que *Magee* había previsto la combinación de estos enfoques cuando planteó la utilización de los árboles de decisión). Por su parte, en 1968, *Raiffa* desarrolló en forma detallada y muy clara la teoría de la decisión, donde se incluye la técnica propuesta por *Magee* y en general todo lo relacionado con las decisiones bajo riesgo.

Aquí se presenta lo relacionado con los árboles de decisión dentro de los planteamientos de los mencionados autores. Sin embargo, se hace con la salvedad de que es una herramienta útil para visualizar las diferentes alternativas que se presentan al decisor y, además, para efectuar un mejor tratamiento probabilístico; pero de ahí a creer que se pueda utilizar como herramienta que involucre conceptos, tales como *la teoría de la utilidad*, hay un largo trecho. Los árboles de decisión son muy útiles para el planteamiento de problemas secuenciales, pero esta clase de situaciones implica decisiones con resultados hacia el futuro que, en términos de comportamiento del decisor, no se ha definido con claridad cómo manejarlos.

En general, los problemas cuyos resultados se presentan como matrices de pago son susceptibles de ser representados como árboles de decisión. El problema del vendedor de periódicos que se presentó como una matriz de resultados, puede ilustrarse como un árbol de decisión (fig. 1):

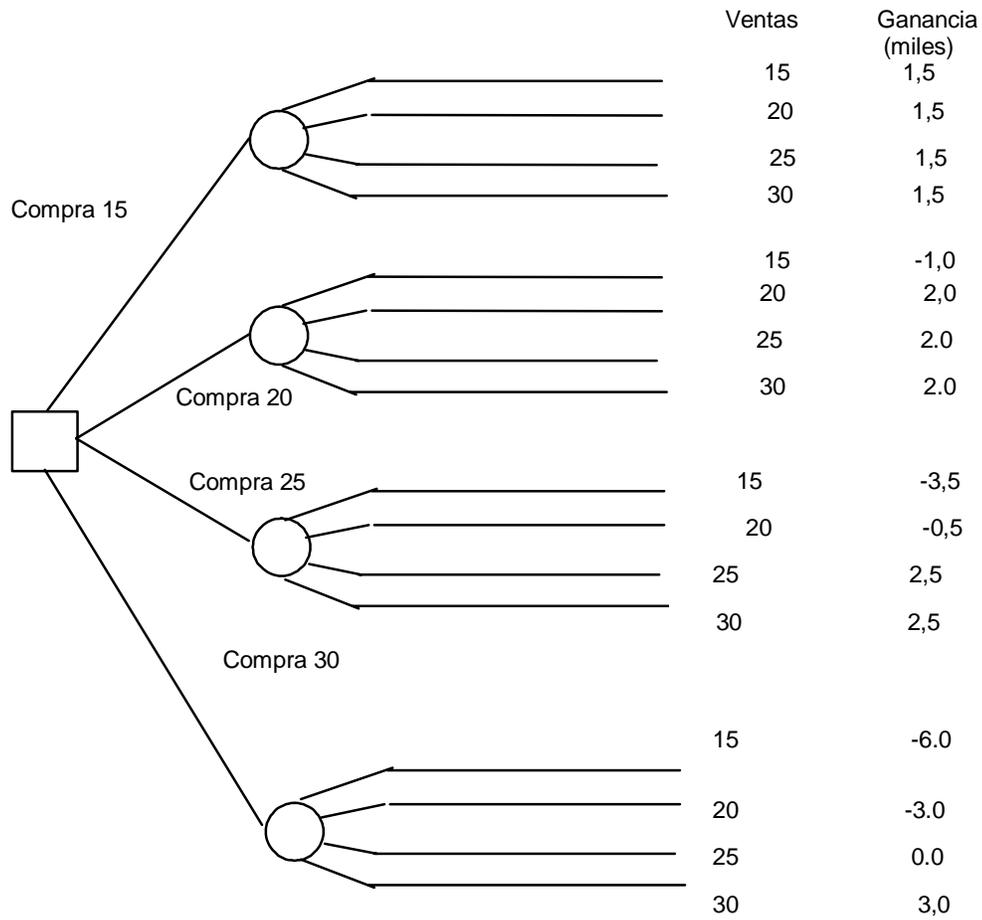


FIGURA 1 El problema del vendedor de periódicos¹

En este caso se observa que no existen probabilidades asociadas a ningún evento.

¹ Los resultados están en miles y redondeados.

De igual manera, en el problema de la Lotería de Santander, las alternativas que se le presentan a quien la compre se pueden ilustrar también como un árbol de decisión. Las ramas de alternativas son comprar la lotería o no comprarla. La alternativa *comprar* tiene tantas ramas a partir de un nodo de azar, como premios existentes; en caso de no ganar, el valor asociado a ese evento es el valor pagado por el billete (negativo). Cada uno de los resultados posibles tiene también restado el valor del billete.

Las operaciones con un árbol de decisión

En un árbol de decisiones hay nodos y ramas. En la figura anterior se puede observar que hay líneas rectas que son las ramas, cuadrados que son los nodos o puntos de decisión y círculos que son nodos o puntos de azar. Las ramas que se extienden de los nodos indican las alternativas que se pueden tomar en el caso de nodos de decisión, o los diferentes resultados de un evento en el caso de los nodos de azar. En este último caso cada rama tiene asociada una probabilidad de ocurrencia. Esta probabilidad es una medida de la posibilidad de que ese evento ocurra. La suma de las probabilidades de las ramas que parten de cada nodo de evento es igual a uno. Es decir, que se supone que los eventos son exhaustivos; a los nodos de decisión no se les asigna probabilidades, ya que en esos puntos el decisor tiene el control y no es un evento aleatorio, sujeto al azar.

La secuencia óptima de decisiones se encuentra comenzando a la derecha y avanzando hacia el origen del árbol. En cada nodo se debe calcular un VPN esperado. Si el nodo es un evento, este VPN se calcula para *todas* las ramas que salen de ese nodo. Si el nodo es un punto de decisión, el VPN esperado se calcula para *cada* una de las ramas y se selecciona el más elevado. En cualquiera de los dos casos el VPN esperado se “lleva” hasta el siguiente evento multiplicado por la probabilidad asociada a la rama por la cual “se viaja”.

Los diferentes autores que tratan el tema utilizan el criterio de maximización del valor esperado monetario; este es conocido también como el criterio *bayesiano* de decisión (ver apéndice para una presentación resumida del *teorema de Bayes*). Como ilustración se presentan tres ejemplos.

Ejemplo 1

El primer ejemplo consiste en el lanzamiento de un nuevo producto al mercado. En el primer punto de decisión hay que enfrentarse a dos alternativas: Introducir a escala nacional o a escala regional. En el segundo punto de decisión hay que decidir entre distribuir a nivel nacional o no. Gráficamente se tiene:

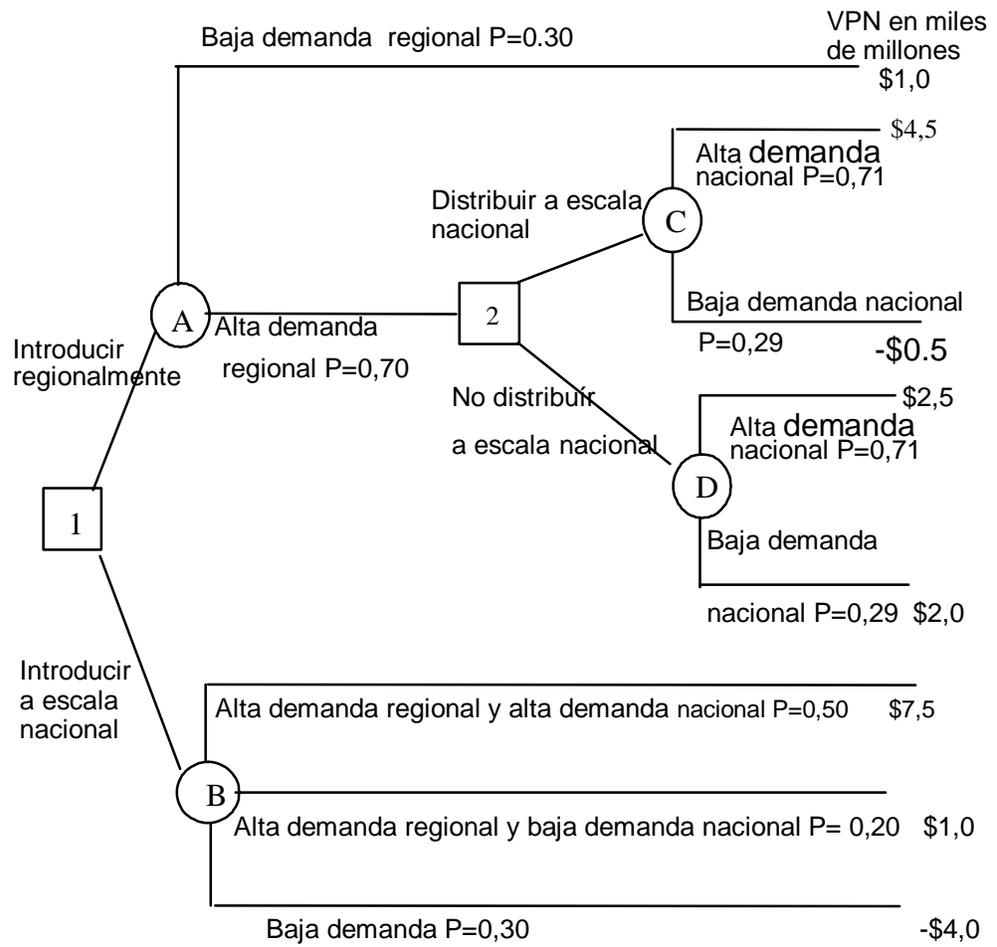


FIGURA 2

Desarrollando este árbol, se tiene lo siguiente:

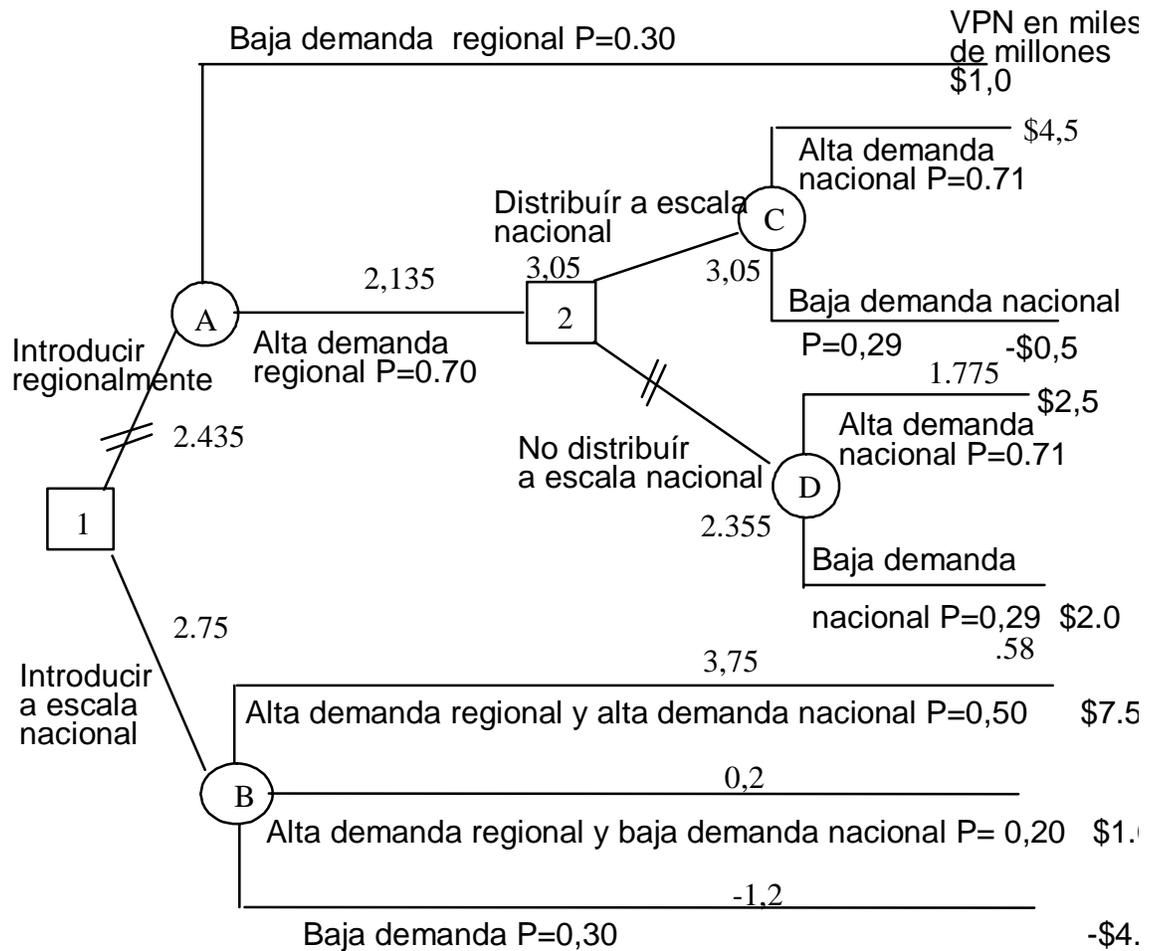


FIGURA 3

En el ejemplo, la probabilidad de obtener una demanda alta si se introduce el producto a nivel regional es 0,7, y la probabilidad de obtener una baja demanda es 0,3. Cada combinación de decisiones y eventos tiene un resultado (en este caso, valor presente neto, VPN) asociado.

En la figura del ejemplo, el VPN de todas las ramas que emanan del evento C es $(4,5 \times 0,71 + (-0,5) \times 0,29) = 3,05$ y para el evento D es 2,355. Pasando al punto de decisión 2 se puede ver que la alternativa seleccionada sería “distribuir” a escala nacional. O sea que si el gerente se ve eventualmente confrontado a tomar la decisión en el punto 2, escogería esta alternativa, y en todos los análisis posteriores podría descartar cualquier otra.

Siguiendo el análisis se pasa al evento A ; el VPN esperado en ese nodo es $(1 \times 0,3 + 3,05 \times 0,7) = 2,435$. De un modo similar el VPN esperado en el nodo B es 2,75. En la figura 3 se resume todo el proceso y se observa que la decisión que se seleccionaría sería “introducir a nivel nacional”. Se debe observar que en este análisis se ha utilizado el criterio de maximizar el VPN esperado. Otro enfoque pudo haber sido maximizar el valor esperado de la utilidad.

Ejemplo 2

El segundo ejemplo trata de una empresa que fabrica un insecticida muy efectivo, pero excesivamente tóxico. La firma está estudiando otro que no es tóxico, pero sin la efectividad del primero. Se sabe que en el Congreso está cursando un proyecto de ley que prohíbe los insecticidas que produzcan efectos nocivos para la ecología. El director de relaciones públicas, que siempre está atento a las acciones gubernamentales que puedan afectar los intereses de la compañía, ha hecho algunos estimativos en relación con la fecha de aprobación de la ley. (El lector deberá hacer las reflexiones del caso y considerar si la firma debe o no esperar a que la ley sea aprobada para retirar del mercado este

producto, teniendo en cuenta los daños que el insecticida ocasiona en la ecología).

Aprobación	Probabilidad
En 6 meses	50%
En 12 meses	20%
En 24 meses	30%

El gerente sabe que el tiempo necesario para vender un lote producido es de 4 meses; esto quiere decir que si la ley se aprueba en 6 meses, no habría producto tóxico en el mercado para esa fecha. Por otro lado, costaría mucho pasar a producir rápidamente de un clase a otra, pero también considera antieconómico parar la producción antes de tiempo.

En una reunión con el gerente de mercadeo y el de producción, llegaron a determinar los siguientes resultados en millones de pesos:

		Aprobación de la ley en 6 meses	Aprobación de la ley en 12 meses	Aprobación de la ley en 24 meses
a1	Cambiar a no tóxico en 20 meses o cuando se apruebe la ley	-110	-80	160
a2:	Cambia a no tóxico en 16 meses o cuando se apruebe la ley	-85	-50	100
a3:	Cambiar a no tóxico en 8 meses o cuando se apruebe la ley	-25	40	-50
a4:	Cambiar a no tóxico en 2 meses	20	0	-30

Esta situación se puede expresar en forma de árbol, así:

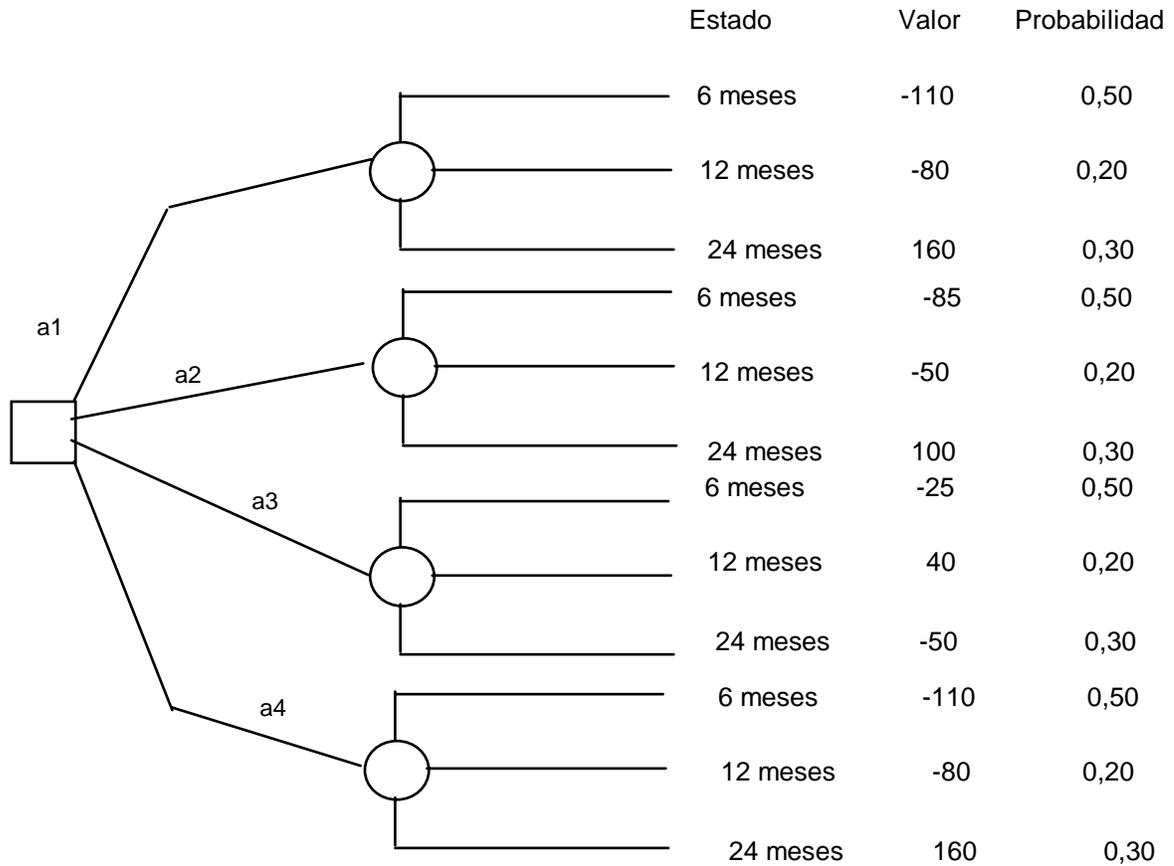


FIGURA 4

La técnica de análisis de decisiones con árboles de decisión, consiste en efectuar cálculos en cada nodo de azar para encontrar el valor esperado. Ese valor reemplaza al nodo de azar y se compara con cada uno de los demás que parten de un nodo de decisión para, posteriormente, seleccionar el mayor. Este valor se asigna al nodo de decisión correspondiente y se llama valor de posición

del nodo de decisión. En el ejemplo del insecticida solo existe un nodo de decisión; más adelante se presentará el tercer ejemplo, que es más complejo.

Como se puede observar, la alternativa óptima bajo criterio bayesiano o de maximización del valor esperado es la alternativa a_4 . (¿Coincidirá con la solución a la cual usted llegó al reflexionar si debía retirar del mercado el producto, independientemente de la aprobación de la ley?).

En el ejemplo anterior no se evidencia la utilidad del procedimiento. Este muestra todo su poder cuando existen decisiones secuenciales. Para ilustrarlo, considérese este tercer ejemplo:

Ejemplo 3

Una compañía estudia la introducción de un nuevo producto. Debido a que en situaciones similares se presentaron fracasos, se decide ejecutar un plan para el desarrollo del producto. Esto incluye estudios de mercado a ciertos costos.

El plan consiste en lo siguiente: Se introduce el producto sin ningún estudio, o se procede a contratar un estudio de mercado. Dependiendo de los resultados, se debe decidir entre contratar una segunda etapa más precisa y costosa o introducir el producto con la información disponible. La primera etapa cuesta \$800.000 y tiene una confiabilidad de 60%, de tal manera que si el producto es bueno, el estudio lo indicará así; e indicará lo contrario, o sea, que es negativo, con una probabilidad de 40%. La segunda etapa cuesta \$4.000.000 y tiene una confiabilidad de 70%. Por consiguiente, si el producto es bueno, el estudio lo

indicará con una probabilidad de 70% y, a su vez, indicará lo contrario con una probabilidad de 30%.

En la figura 1 se pueden observar las diferentes alternativas y eventos asociados a este problema. Allí se han asociado probabilidades a los diferentes eventos. Más adelante se deducirán estos valores. Por lo pronto se describirá el proceso de decisión de acuerdo con lo que indica el árbol.

Existen programas que se adicionan a *Excel* que sirven para este tipo de operaciones con árboles de decisión. El interesado puede bajar un programa de muestra desde <http://www.treeplan.com/> o desde <http://www.decisiontoolpak.com/>.

Análisis del problema

Si se decide no realizar ningún estudio de mercado, el decisor puede introducir o no el producto; si lo introduce, la única información con que cuenta es un estimativo *a priori* de que la probabilidad de éxito es igual al 35%, y la probabilidad de fracaso es igual al 65%.

Si se decide abordar la primera etapa del estudio de mercado, a un costo de \$800.000, se puede indicar que el producto es bueno (primera etapa exitosa) con una probabilidad de 47%. A partir de allí, el decisor deberá escoger entre continuar o no con la segunda etapa. Si descontinúa el estudio, deberá decidir entre introducir o no el producto. Si decide introducirlo, las probabilidades de éxito y fracaso se habrán modificado gracias a la información arrojada por la primera etapa; estas probabilidades son de 45% para éxito y 55% para fracaso (si la primera etapa del estudio indicó un resultado positivo, intuitivamente se espera

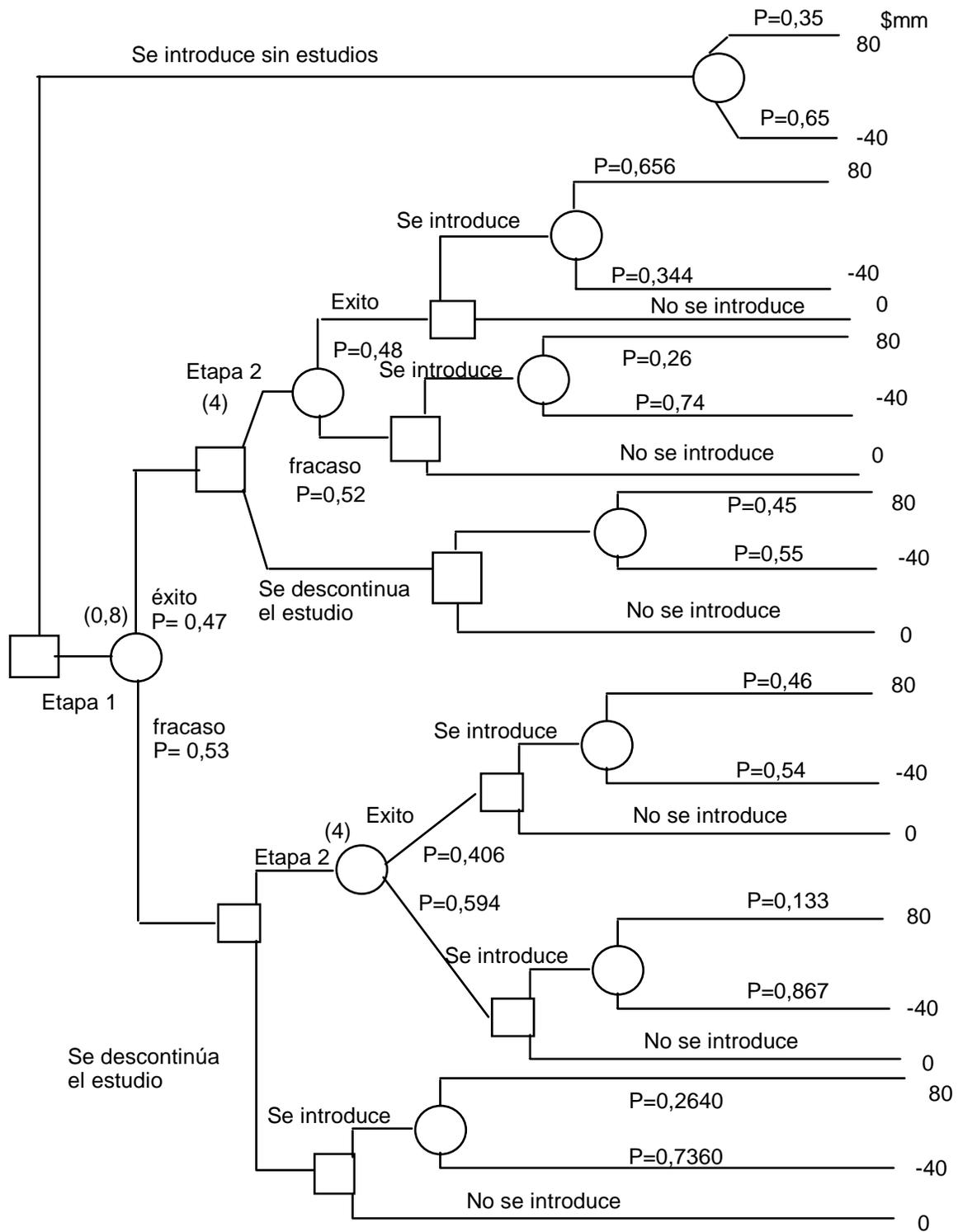
que se mejore el estimativo inicial). Si se decide emprender la segunda etapa del estudio a un costo de \$4.000.000, esta etapa indicará un resultado positivo con probabilidad de 48%, y negativo con una probabilidad de 52%. Si el resultado es positivo deberá decidir entre introducir el producto o no. Si lo introduce, las probabilidades de éxito y fracaso se habrán modificado nuevamente, gracias a los resultados de la segunda etapa, en 65,6% y 34,4% respectivamente. Si el resultado es negativo tendría que decidir entre introducir o no el producto, y la probabilidad de éxito se habría modificado a 26%, y la de fracaso a 74%. (Si la segunda etapa indica fracaso, es razonable pensar que la probabilidad de éxito estimada sea menor que si el resultado del estudio hubiera sido positivo).

Si la primera etapa del estudio indica que el producto sería un fracaso, debe decidir entre discontinuar o no el estudio. Si se discontinúa el estudio deberá decidir entre introducir o no el producto. Si se decide introducir el producto las probabilidades de éxito y fracaso se habrán modificado a un 26,4% y 73,6%, como resultado de lo que indicó la primera etapa. (Nuevamente, si la primera etapa indicó que el producto sería un fracaso, es de esperarse que la probabilidad de éxito revisada sea menor que 35%).

Si decide continuar con la segunda etapa del estudio, ésta puede indicar que el producto es un éxito con una probabilidad de 40,6%, y que es un fracaso con una probabilidad de 59,4%. Si indica que es un fracaso deberá decidir entre introducir o no el producto; si lo introduce, la probabilidad de éxito se reduce a 13,3% y la de fracaso aumenta a 86,7% (esto es lógico de acuerdo con lo mencionado antes). Si

la segunda etapa indica que el producto es un éxito, debe también decidirse entre introducir o no el producto. Si decide introducirlo, las probabilidades de éxito y fracaso se modifican a 46% y 54% respectivamente.

Con el árbol de decisión de la figura 1 se procede a “devolverse” y fijar los valores de los nodos de decisión. Ya en la figura 2 las ramas que están cruzadas por dos rayitas no son óptimas. El número encima de los nodos de azar indica el valor esperado de ese nodo; el número encima de los nodos de decisión indica el valor de la mejor alternativa en ese nodo, y se llama valor de posición. En la figura 2 aparece el árbol desarrollado y se indican las alternativas óptimas. A partir de allí se puede entonces desarrollar las políticas a seguir, dados los resultados de los estudios. Esto es, se debe realizar la primera etapa del estudio; si hay un resultado positivo se debe emprender la segunda etapa del estudio y, en caso de que ésta indique que el producto es un éxito, se debe introducir el producto; en caso contrario, no. Si la primera etapa indicara que el producto es un fracaso, se debe emprender la segunda etapa del estudio y, en caso de que ésta indique que el producto es un éxito, se debe introducir, de otra manera no.



Nota: El costo de cada etapa está entre paréntesis

Fig.1 Árbol de decisiones para un problema secuencial

En este ejemplo se indicaron las probabilidades de cada uno de los eventos, pero no se indicó cómo se obtenían. Las probabilidades *a priori* se pueden estimar en forma subjetiva o con base en datos históricos. Sin embargo, es posible mejorar esos estimativos “comprando” información; con base en esa información se calculan las probabilidades *a posteriori*, utilizando el teorema de Bayes.

Información *a priori*:

$$P(\text{producto exitoso}) = P(S) = 35\% = 0,35$$

$$P(\text{producto un fracaso}) = P(I) = 65\% = 0,65$$

Con esta aclaración deberá entenderse el árbol de decisión de la figura 1. Y la decisión que deberá tomarse.

En la figura 2 se puede observar lo siguiente: Se debe realizar la primera etapa; si hay éxito se debe emprender la segunda etapa y, en caso de que ésta indique que el producto es un éxito, se debe introducir el producto, en caso contrario no. Si después de la primera etapa no hay éxito se debe proceder a la segunda; si hay éxito debe introducirse. En caso de fracaso, no se introduce el producto.

En el ejemplo anterior no se explicó el modo de determinar las probabilidades asociadas a cada rama que parte de los nodos de azar. En todo proceso de asignar probabilidades es necesario obtener información a un costo, y con base en ella determinar las probabilidades. Sin excluir el proceso de obtener información, también se asignan probabilidades subjetivas.

A continuación se establecerá el procedimiento para obtener las probabilidades, con base en información obtenida posiblemente a través de encuestas.

Confiabilidad de los estudios.

Primera etapa del estudio

$P(\text{etapa 1 exitoso, dado que en realidad es exitoso})$

$=P(E1E|E)=60\%=0,60$ (“dice la verdad”, es confiable)

$P(\text{etapa 1 fracaso, dado que en realidad es un fracaso})$

$=P(E1F|F)=60\%=0,60$ (“dice la verdad”, es confiable)

$P(\text{etapa 1 exitoso, dado que en realidad es un fracaso})$

$=P(E1E|F)=40\%=0,40$ (“dice mentiras”, no es confiable)

$p(\text{etapa 1 fracaso, dado que en realidad es un éxito})$

$=P(E1F|E)=40\%=0,40$ (“dice mentiras”, no es confiable)

Es decir:

$P(E1E|E)=P(E1F|F)=0,60$

$P(E1E|F)=P(E1F|E)=0,40$

Segunda etapa del estudio

$P(\text{etapa 2 exitoso, dado que en realidad es exitoso})$

$=P(E2E|E)=70\%=0,70$ (“dice la verdad”, es confiable)

$P(\text{etapa 2 fracaso, dado que en realidad es un fracaso})$

$=P(E22F|F)=70\%=0,70$ (“dice la verdad”, es confiable)

$P(\text{etapa 2 exitoso, dado que en realidad es un fracaso})$

$=P(E2E|F)=30\%=0,30$ (“dice mentiras”, no es confiable)

$P(\text{etapa 2 fracaso, dado que en realidad es un éxito})$

$$=P(E2F|E)=30\%=0,30 \text{ ("dice mentiras", no es confiable)}$$

Es decir:

$$P(E2E|E)=P(E2F|F)=70\%=0,70$$

$$P(E2E|F)=P(E2F|E)=30\%=0,30$$

Resultados de los estudios

La primera etapa del estudio puede indicar que el producto es un éxito en dos formas: "diciendo la verdad" o "mintiendo". La probabilidad conjunta es entonces la probabilidad de la combinación de los siguientes eventos: El producto es exitoso y el resultado del estudio positivo, o el producto es un fracaso y el resultado del estudio es positivo.

En términos de probabilidad se tendría:

$$P(E) \times P(E1E|E) + P(F) \times P(E1E|F) = 0,35 \times 0,60 + 0,65 \times 0,40$$

$$=0,47$$

De este resultado se puede estimar la probabilidad *a posteriori* de que el producto sea un éxito o un fracaso. La probabilidad conjunta de que el producto sea un éxito y de que el primer estudio así lo indique, es de 21%. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto sea un éxito dado que el estudio así lo indica, será de 45%; así:

$$P(E | E1E) = \frac{P(E) * P(E1E | E)}{P(E) * P(E1E | E) + P(F) * P(E1E | F)} = \frac{0,21}{0,47} = 0,45$$

De igual forma se puede calcular $P(F|E1E)$, lo cual indicaría una probabilidad de 55%.

La primera etapa del estudio puede indicar que el producto es un fracaso en dos formas: “diciendo la verdad” o “mintiendo”. La probabilidad conjunta es entonces la probabilidad de la combinación de los siguientes eventos: El producto es un fracaso y el resultado del estudio es negativo, o el producto es exitoso y el resultado del estudio es negativo).

En términos de probabilidad se tendría:

$$P(F) \times P(E1F|F) + P(E) \times P(E1F|E) = 0,65 \times 0,60 + 0,35 \times 0,40 = 0,53$$

A partir del razonamiento anterior, se puede calcular la probabilidad *a posteriori* de éxito y fracaso después de que el primer estudio arroje un resultado negativo:

$$P(E | E1F) = \frac{P(E) * P(E1F | E)}{P(F) * P(E1F | F) + P(E) * P(E1F | E)} = \frac{0,14}{0,53} = 0,264$$

De igual forma se puede calcular la probabilidad condicional de fracaso, dado que la primera etapa produjo un resultado negativo $P(F|E1F)$. En este caso, su valor sería de 73,6%.

Para considerar los resultados de la segunda etapa del estudio de mercados, es necesario considerar lo que indica la primera etapa del estudio, ya que se modifican las probabilidades *a priori* que se tenían. En este caso se deben considerar entonces dos situaciones: la primera etapa del estudio indica que el producto es un éxito y en caso contrario indica que es un fracaso.

Primera etapa del estudio de mercado indica éxito

Si en la primera etapa del estudio se obtuvo un resultado positivo, entonces la segunda etapa del estudio podrá decir que el producto es un éxito de dos formas: “diciendo la verdad” o “mintiendo”. La probabilidad de que diga que es un éxito será la combinación de los siguientes eventos: el producto es un éxito después de realizado el primer estudio; la segunda etapa dice que es un éxito cuando de verdad el producto es bueno; el producto es un fracaso después de haber realizado el primer estudio; y la segunda etapa sostiene que es un éxito cuando el producto es malo.

P(éxito después del primer estudio, a posteriori) x P(etapa 2 exitoso, dado que en realidad es exitoso)+P(fracaso después de realizado el primer estudio. a posteriori) x P(etapa 2 exitoso, dado que en realidad es un fracaso.

Esto es:

$$P(E|E1E) \times P(E2E|E) + P(F|E1E) \times P(E2E|F) = 0,45 \times 0,70 + 0,55 \times 0,30 = 0,48$$

De este resultado se puede estimar la probabilidad *a posteriori* de que el producto sea un éxito o un fracaso. La probabilidad conjunta de que el producto sea un éxito y de que el segundo estudio así lo indique es de 31,5%. Por lo tanto,

la probabilidad de que el producto sea un éxito, dado que el segundo estudio así lo indica será de 65,6%; o sea,

$$P(E | E2E) = \frac{P(E | E1E) * P(E2E | E)}{P(E | E1E) * P(E2E | E) + P(F | E1E) * P(E2E | F)} = \frac{0,315}{0,48} = 0,656$$

De igual forma se puede calcular $P(I|E2S)$, la cual es igual a 0,344.

Si el primer estudio indicó que el producto era exitoso, la probabilidad de que la segunda etapa del estudio indique que es un fracaso será la probabilidad de la combinación de los siguientes eventos: el producto es un fracaso después de realizado el primer estudio, la segunda etapa dice que es un fracaso cuando de verdad es un fracaso; el producto es un éxito después de realizado el primer estudio; la segunda etapa dice que es un fracaso cuando de verdad es un éxito.

P (fracaso después de realizado el primer estudio, a posteriori) x P(etapa 2 fracaso, dado que en realidad es un fracaso)+P(éxito después de realizado el primer estudio, a posteriori) x P(etapa 2 fracaso, dado que en realidad es un éxito)

Esto es:

$$P(F|E1E) \times P(E2F|F) + P(E|E1E) \times P(E2F|E) = 0,55 \times 0,70 + 0,45 \times 0,30 = 0,52$$

De este resultado se puede estimar la probabilidad *a posteriori* de que el producto sea un éxito o un fracaso. La probabilidad conjunta de que el producto sea un fracaso y de que el segundo estudio así lo indique es de 38,5%. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto sea un éxito, dado que el segundo estudio así lo indica, será de 74%, o sea:

$$P(E|E2F) = \frac{P(E|E1E) * P(E2F|E)}{P(F|E1E) * P(E2F|F) + P(E|E1E) * P(E2F|E)} = \frac{0,135}{0,52} = 0,26$$

De igual forma se puede calcular el valor de $P(F|E2F)$, la cual es igual a 74%.

Primera etapa del estudio de mercado indica fracaso

Si en la primera etapa del estudio se obtuvo un resultado negativo, entonces la segunda etapa del estudio podrá decir que el producto es un éxito de dos formas: “diciendo la verdad” o “mintiendo”. La probabilidad de que diga que es un éxito será la combinación de los siguientes eventos: el producto es un éxito después de realizado el primer estudio; la segunda etapa dice que es un éxito cuando de verdad el producto es bueno; el producto es un fracaso después de haber realizado el primer estudio; la segunda etapa dice que es un éxito cuando el producto es malo.

$P(\text{éxito después del primer estudio, a posteriori}) \times P(\text{etapa 2 exitoso, dado que en realidad es exitoso}) + P(\text{fracaso después de realizado el primer estudio, a posteriori}) \times P(\text{etapa 2 exitoso, dado que en realidad es un fracaso}).$

Esto es:

$$P(E|E1F) \times P(E2E|E) + P(F|E1F) \times P(E2E|F) = 0,264 \times 0,70 + 0,736 \times 0,30 = 0,406$$

De este resultado se puede estimar la probabilidad *a posteriori* de que el producto sea un éxito o un fracaso. La probabilidad conjunta de que el producto sea un éxito y de que el segundo estudio así lo indique es de 18,5%. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto sea un éxito dado que el segundo estudio así lo indica será de 46%

Es decir:

$$P(E | E2E) = \frac{P(E | E1F) * P(E2E | E)}{P(E | E1F) * P(E2E | E) + P(F | E1F) * P(E2E | F)} = \frac{0,185}{0,406} = 0,46$$

Si el primer estudio indicó que el producto era un fracaso, la probabilidad de que la segunda etapa del estudio indique que es un fracaso será la probabilidad de la combinación de los siguientes eventos: el producto es un fracaso después de realizado el primer estudio; la segunda etapa dice que es un fracaso cuando de

verdad es un fracaso; el producto es un éxito después de realizado el primer estudio; la segunda etapa dice que es un fracaso cuando de verdad es un éxito.

$P(\text{fracaso después de realizado el primer estudio, a posteriori}) \times P(\text{etapa 2 fracaso, dado que en realidad es un fracaso}) + P(\text{éxito después de realizado el primer estudio, a posteriori}) \times P(\text{etapa 2 fracaso, dado que en realidad es un éxito})$.

Esto es:

$$P(F|E1F) \times P(E2F|F) + P(E|E1F) \times P(E2F|E) = 0,736 \times 0,70 + 0,264 \times 0,30 = 0,594$$

De este resultado se puede estimar la probabilidad *a posteriori* de que el producto sea un éxito o un fracaso. La probabilidad conjunta de que el producto sea un fracaso y de que el segundo estudio así lo indique es de 7,92%. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto sea un éxito, dado que el segundo estudio así lo indica, será de 13,3%; o sea:

$$P(E|E2F) = \frac{P(E|E1F) * P(E2F|E)}{P(F|E1F) * P(E2F|F) + P(E|E1F) * P(E2F|E)} = \frac{0,0792}{0,594} = 0,133$$

De igual forma se puede calcular el valor de $P(F|E2F)$, la cual es igual a 86,7%.

En resumen:

Probabilidad de los resultados del segundo estudio.

	primer	Estudio
Segundo estudio	éxito	Fracaso
Exito	0,48	0,406
Fracaso	0,52	0,594

				Probabilidad	a posteriori		
Producto	Probabilidad A priori	Primer estudio indica éxito	Primer estudio indica fracaso	Primer estudio indica éxito y segundo estudio indica éxito	Primer estudio indica éxito y segundo estudio indica fracaso	Primer estudio indica fracaso y segundo estudio indica éxito	Primer estudio indica fracaso y segundo estudio indica fracaso
Éxito(E)	0,35	0,45	0,264	0,656	0,26	0,46	0,133
Fracaso (F)	0,65	0,55	0,736	0,344	0,74	0,54	0,867

De esta forma quedan establecidas las probabilidades de todas las ramas del árbol.

Ventajas y desventajas de los árboles de decisión

Con este ejemplo se puede observar la gran utilidad de la técnica, pues ésta establece de antemano las políticas a seguir, dada la ocurrencia de ciertos eventos. Por la forma de hacer el análisis —devolverse desde las ramas al punto de la decisión inicial— se parece a la programación dinámica, la cual también establece una secuencia de decisiones a seguir para obtener el resultado óptimo.

Una de las desventajas de los árboles de decisión es su dificultad cuando se presentan muchas alternativas, lo cual es probable que ocurra si se desea que el

modelo se aproxime a la realidad. En este caso el número de cálculos puede crecer en forma desproporcionada. El número de puntos finales crece rápidamente en la medida en que el número de nodos crece. Esto induce al analista a reducir intencionalmente el número de puntos terminales, mientras los estimativos de la probabilidad son muy escasos y pobres. Por lo tanto el uso de este enfoque puede dar unos resultados inadecuados. *Hespos* y *Strassann* han propuesto simplificar los árboles asignando distribuciones de probabilidad a los nodos de azar y efectuando un proceso iterativo de simulación. También proponen hacer eliminaciones en el desarrollo del proceso con base en el valor esperado y la varianza de las diferentes distribuciones resultantes. En otras palabras, se eliminarían aquellas distribuciones con mayores (o menores) valores esperados y varianzas, simultáneamente (si una distribución tiene menor valor esperado y mayor varianza que otra, se descarta la primera, bajo el supuesto de que se trata de utilidades; si fueran costos se consideraría el mayor valor esperado y mayor varianza). También sugieren que se descarten en el proceso valores que no cumplan con ciertos límites preestablecidos. De esta forma el análisis se simplificaría al reducir los eventos.

Referencias

Bierman, H., S. Smidt, *The Capital Budgeting Decision*, Toronto, 2ª ed., Collier-MacMillan, 1966.

Dyckman, T.R., S. Smidt, *Management Decision Making Under Uncertainty*, Londres, The MacMillan Co., 1969.

Hamburg, M. *Statistical Analysis for Decision Making*, New York, Harcourt, Brace and World, Inc, 1970.

Hertz, D.B., "Risk analysis in capital investment", en *Harvard Business Review*, enero - febrero de 1964, p.p. 95-106.

Hesspos, R.F., P. A. Strassmann, "Stochastic decision trees for the analysis of investment decisions", en *Management Science*, Vol. 11, No.10, agosto de 1965, p.p. 244-259.

Hillier, F.S., "The derivation of probabilistic information of risky investments", en *Management Science*, Vol. 9, No. 3, abril de 1963.

Magee, J.F., "Decision trees for decision making", en *Harvard Business Review*, julio - agosto de 1964.

Magee, J.F., "How to use decision trees in capital investment", en *Harvard Business Review*, septiembre - octubre de 1964.

Raiffa, H., *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty*, Massachusetts, Addison - Wesley Publishing Co., Reading, 1968.

Schalaifer, R., *Probability and Statistics for Business Decisions*, Tokio, McGraw-Hill Book Co., Inc., Kogakusha Co. Ltd., 1959.

Vélez, Ignacio, *Decisiones de Inversión*, Bogotá, Universidad de los Andes, mimeografía, mayo de 1987, p. 459.

Ejercicios

1) Una compañía petrolera desea perforar un pozo exploratorio, lo cual costaría \$900 millones. Existen dos tipos de suelo:

- a) Calizo con probabilidad de 60%.
- b) Arena con probabilidad de 40%.

Se conocen las tablas de probabilidad de encontrar petróleo en función del terreno, que son:

	Dado que el suelo sea	
Se encontrará	Caliza	Arena
Petróleo	0,20	0,40
Gas	0,40	0,20
Agua	0,40	0,40

Si se encuentra petróleo se obtiene una ganancia de \$3.000 millones; si encuentra gas \$500 millones y si encuentra agua se pierde el pozo.

Antes de perforar puede decidir hacer un examen de suelos a un costo de 100 millones, lo cual le indicaría si es caliza o arena. Puede igualmente ahorrarse los \$100 millones y perforar sin ninguna clase de estudios.

Construya el árbol de decisiones de esta situación e indique:

- a) ¿Qué debe hacer para optimizar su ganancia esperada?
- b) Si perfora sin experimentar y encuentra petróleo, ¿cuál es la probabilidad de que el suelo sea de arena?

2) Suponga que el gerente de ventas de una firma trata de decidir entre introducir o no un nuevo producto al mercado. El costo de desarrollo y mercadeo del producto es de \$35.000.000. Las utilidades obtenidas dependen de que la competencia venda un producto similar o no y del precio que pida por el producto. Si la firma no introduce el producto competitivo, el gerente puede fijar el precio en tal forma que maximice las utilidades. Sin embargo, con un producto competitivo en el mercado, las utilidades dependerán del precio de la competencia. Se debe tomar una decisión ahora entre introducir o no al mercado el producto y posteriormente determinar un precio. Se supone que si no se introduce el producto y la competencia lo hace, esto no afectará la situación económica de la empresa en relación con los otros productos e la empresa.

Se estima que las probabilidades y las ganancias asociadas a los diferentes eventos y decisiones son las siguientes:

La probabilidad de que la empresa introduzca un producto similar es de 80%. En este caso:

Precio de la firma	Precio de la competencia y probabilidad asociada.	Utilidades obtenidas por la firma (no incluye el costo de introducción del producto)
	Alto $P=0,40$	\$50,000,000
Alto	Medio $P=0,50$	30,000,000
	Bajo $P=0,10$	10,000,000
	Alto $P=0,10$	\$55,000,000

Medio	Medio P=0,60	\$40,000,000
	Bajo P=0,30	\$25,000,000
	Alto P=0,10	\$50,000,000
Bajo	Medio P=0,20	40,000,000
	Bajo P=0,70	30,000,000

La probabilidad de que la competencia no introduzca el producto es de 20%. En este caso:

Precio de la firma	Utilidades obtenidas por la firma (no incluye el costo de introducción del producto).
Alto	\$100,000,000
Medio	80,000,000
Bajo	60,000,000

a) Dibuje el árbol de decisiones para este caso.

b) ¿Qué decisiones se deben tomar? ¿Cuáles son los valores de posición de los nodos?

3) Estrategia de inversión en investigación

El Instituto de Investigación Aplicada (IIA) está considerando la realización de dos proyectos de investigación, *A* y *B*, los cuales no son excluyentes, pero sí dependientes porque cada uno aporta información valiosa para el otro, a pesar de que sus campos de aplicación son muy diferentes. La realización completa de cada uno de esos proyectos tiene una duración de un año y produce resultados

directamente aplicables que empiezan a producir beneficios una vez terminada la investigación respectiva.

La investigación *A* requiere una inversión inicial de \$5,000,000 en equipo de laboratorio y pago de investigadores, y el proyecto *B* requiere \$7,000,000 en inversiones similares. Si los proyectos se realizan simultáneamente, es necesario invertir \$12.000.000, pero si se llevan a cabo en forma secuencial solo es necesario invertir \$10.000.000, porque en ese caso cierto equipo utilizado en una investigación podría ser utilizado después por la otra. Esta clase de equipo no tiene valor comercial de salvamento.

Los gastos de operación de la investigación son de \$1.000.000 anuales por proyecto y no cambian si se ejecutan en forma simultánea o secuencial. Los beneficios promedio de los resultados de la investigación son de \$1.000.000 al año para el proyecto *A* y de \$1.500.000 para el proyecto *B* y ocurren prácticamente a perpetuidad. La obtención de esos beneficios no exige inversiones adicionales futuras y las cifras presentadas son netas. Además, los beneficios son independientes entre sí. La tasa de descuento es de 25% anual.

Los resultados de estos proyectos se pueden describir vaga y misteriosamente diciendo que hubo éxito o “fracaso”. Las investigaciones tratan de examinar hipótesis que, en caso de ser ciertas, son aplicables a procesos productivos de empresas cuyos bienes y servicios son de beneficio común, y en caso de ser

falsas el resultado es que no se pueden aplicar. El éxito significa que se obtendrán los beneficios mencionados, y el “fracaso” significa que no se producirán esos beneficios.

La distribución de probabilidad conjunta de los éxitos y fracasos en las investigaciones, cuando ambas se realizan, aunque no necesariamente en forma simultánea, es la siguiente:

	Proyecto A	
Proyecto B	Éxito	Fracaso
Éxito	0,80	0,05
Fracaso	0,10	0,05

Es posible realizar secuencialmente los proyectos para aprovechar la información contenida en el evento de éxito o fracaso de cualquiera de los dos, dado el éxito o fracaso del otro. Ese resultado solo se conoce al terminar completamente el primer proyecto emprendido.

Existe mucha controversia e incertidumbre acerca de las probabilidades de éxito o fracaso de cada uno de los proyectos cuando se realizan en forma aislada. Los expertos se rehúsan a realizar estimaciones de probabilidades subjetivas en tal caso.

a) En una primera aproximación a la solución del problema, se supone que hay indiferencia ante el riesgo para no plantear los problemas planteados al tratar de determinar las funciones de utilidad, dado que el beneficio es colectivo, ¿cuál será la estrategia óptima de inversión en investigación?

b) Suponga que lo único en que han podido ponerse de acuerdo los legisladores que reparten los fondos públicos para estos proyectos es que existe alguna clase de aversión al riesgo. ¿Cómo cambiaría esto la estrategia óptima? Proponga y ejecute el análisis conveniente en este caso.

8	1
Árboles de decisión	1
Las ideas básicas de la técnica de árboles de decisión	1
Las operaciones con un árbol de decisión.....	4
Análisis del problema.....	12
Ventajas y desventajas de los árboles de decisión.....	26
Referencias.....	27
Ejercicios	29