Selección del portafolio óptimo: Una nota
Optimal Portfolio Selection: A Note

Ignacio Vélez-Pareja

ivelez@poligran.edu.co

Facultad de Ingeniería Industrial

Politécnico Grancolombiano

Bogotá, Colombia

Working Paper N 14

First version: September 25, 2001

This version: September 25, 2001

SELECCIÓN DEL PORTAFOLIO ÓPTIMO: UNA NOTA

Resumen

Usualmente los textos y cursos de finanzas enseñan el tema de selección de portafolio de una manera muy teórica. Existe un modelo (Markowitz) que dice que un inversionista tiene preferencias y que escogerá el mejor portafolio, dadas sus curvas de preferencia y una frontera eficiente. Por el otro lado, el modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM) se presenta como una idea muy ingeniosa que sirvió para simplificar y hacer operativo el modelo de Markowitz.

La mayoría de los estudiantes y la gente en la práctica concluyen que estos modelos son pura teoría sin ninguna posibilidad de aplicación. Y este es un comportamiento muy racional. ¿Qué puede hacer un inversionista con lo que le dicen en los cursos y libros de finanzas? Muy poco. Usar el olfato.

Mi propósito con esta nota es rescatar un procedimiento simple propuesto por Black (1972), Merton (1973) y más tarde en sus textos, por Levy y Sarnat (1982), Elton y Gruber (1995) y Benninga (1997). Se propone que el portafolio óptimo se puede encontrar maximizando la pendiente de la recta que une el punto de la rentabilidad libre de riesgo y la frontera eficiente. Cuando se alcanza este valor máximo, la línea es la línea del Mercado de capitales (LMC) (ella es tangente a la frontera eficiente). Este es un procedimiento simple que no requiere siquiera calcular la frontera eficiente. Y es muy fácil hacerlo con una hoja de cálculo como Excel y la opción Solver. Es simplemente un punto de la frontera eficiente. Se presenta un ejemplo.

Palabras claves

CAPM, efficient frontier, porfolio selection, capital market line, optimal portfolio

JEL Classification: G11,G12

Selección de portafolios óptimos usando Excel

Por Ignacio Vélez Pareja

Usualmente los textos y cursos de finanzas enseñan el tema de selección de portafolio de una manera muy teórica. Existe un modelo (Markowitz) que dice que un inversionista tiene preferencias y que escogerá el mejor portafolio, dadas sus curvas de preferencia y una frontera eficiente. Por el otro lado, el modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM) se presenta como una idea muy ingeniosa que sirvió para simplificar y hacer operativo el modelo de Markowitz.

La mayoría de los estudiantes y la gente en la práctica concluyen que estos modelos son pura teoría sin ninguna posibilidad de aplicación. Y este es un comportamiento muy racional. ¿Qué puede hacer un inversionista conlo que le dicen en los cursos y libros de finanzas? Muy poco. Usar el olfato.

Mi propósito con esta nota es rescatar un procedimiento simple propuesto por Black (1972), Merton (1973) y más tarde en sus textos, por Levy y Sarnat (1982), Elton y Gruber (1995) y Benninga (1997). Se propone que el portafolio óptimo se puede encontrar maximizando la pendiente de la recta que une el punto de la rentabilidad libre de riesgo y la frontera eficiente. Cuando se alcanza este valor máximo, la línea es la línea del Mercado de capitales (LMC) (ella es tangente a la frontera eficiente). Este es un procedimiento simple que no requiere siquiera calcular la frontera eficiente. Y es muy fácil hacerlo con una hoja de cálculo como Excel y la opción Solver. Es simplemente un punto de la frontera eficiente. Se presenta a continuación un ejemplo.

Ejemplo

Suponga cuatro acciones con las siguientes rentabilidades:

Mes	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
1	18,25%	19,13%	18,87%	7,59%
2	2,03%	2,14%	13,42%	-7,83%
3	-11,15%	-5,27%	2,32%	-25,11%
4	-14,50%	-6,27%	-10,81%	-10,08%
5	21,37%	4,01%	-21,58%	11,54%
6	14,28%	4,00%	12,57%	-13,72%
7	11,50%	9,40%	15,42%	-18,73%
8	-6,11%	-4,04%	-6,32%	11,50%
9	-2,81%	-1,07%	5,71%	18,72%
10	-14,23%	-8,56%	4,00%	9,25%
11	-10,71%	-8,83%	2,12%	20,02%
12	15,15%	10,22%	-24,44%	15,72%
Promedio	1,92%	1,24%	0,94%	1,57%
Varianza	1,68%	0,68%	1,83%	2,26%
Desviación estándar	12,95%	8,23%	13,54%	15,03%
Peso	25%	25%	25%	25%

Cálculo del portafolio óptimo

¿Qué es un portafolio óptimo? Un portafolio óptimo, a la luz del modelo CAPM, es aquél que pertenece a la frontera eficiente, que combinado con una proporción de inversión sin riesgo y dado un determinado nivel de riesgo deseado, maximiza la rentabilidad. Esta definición es válida aun si el nivel de riesgo deseado es menor que el establecido como mínimo por la frontera eficiente. Ahora la pregunta que debe responderse es, ¿cómo se determina el portafolio óptimo? Ese portafolio óptimo es simplemente el punto de tangencia entre la Línea del Mercado de Capitales y la frontera eficiente. Como este portafolio óptimo debe quedar en la frontera eficiente, entonces el punto de tangencia está localizado en la recta con máxima tangente entre esa recta y la horizontal. Esta solución es muy buena y elegante porque no es fácil determinar las curvas de indiferencia que requiere el modelo de Markowitz. Sin embargo, como se dijo arriba, no es necesario generar esas curvas de indiferencia y ni siquiera la frontera eficiente, dado el Teorema de Separación propuesto por Tobin.

si se conoce la tasa de interés libre de riesgo, cómo se determina la pendiente de la recta. En otras palabras, otra vez se plantea el problema de determinar *m*. Este problema existe porque no es fácil en la práctica determinar las curvas de indiferencia de un decisor; sin embargo, por lo que se dijo arriba, no es necesario calcular estas curvas y puede encontrarse una forma alterna de determinar *m*, lo cual se presenta más adelante. Gráficamente, se puede determinar como aquella recta que pasa por *r* y tiene la máxima pendiente sin salirse de la frontera eficiente determinada al comienzo.

En resumidas cuentas, el decisor siempre estará, según la teoría, con una fracción, con todo o con más de lo que tiene en la actualidad, invertido en el portafolio *m*.

Para hallar el portafolio *m*, lo que hay que hacer es darse cuenta de que la pendiente de la recta que pasa por *m* y por *r* es la máxima posible, y de que corresponde a otro problema de optimización. De acuerdo con la teoría del Capital Asset Pricing Model (CAPM), el inversionista preferirá una posición en el "portafolio de mercado" sea con o sin deuda. Entonces, el portafolio óptimo está dado por la solución a un problema de optimización.

En este caso se trata de maximizar:

$$\begin{aligned} &Maxtn\theta = \frac{R_m - r}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k\alpha_j\sigma_{kj}}} \\ &s.a \\ &\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1 \end{aligned} \qquad (7.10)$$

Donde α_i es la participación de la acción *i* en el portafolio, σ_{kj} es la covarianza entre las acciones *k* y *j*, R_m es la rentabilidad del portafolio, *r* es la rentabilidad libre de riesgo y m es el número de acciones que se estudian. La restrcción de que las α's sean positivas se puede incluir. En esto caso no hay lo que se llama posición corta.

Esta idea se puede ver en la siguiente figura:

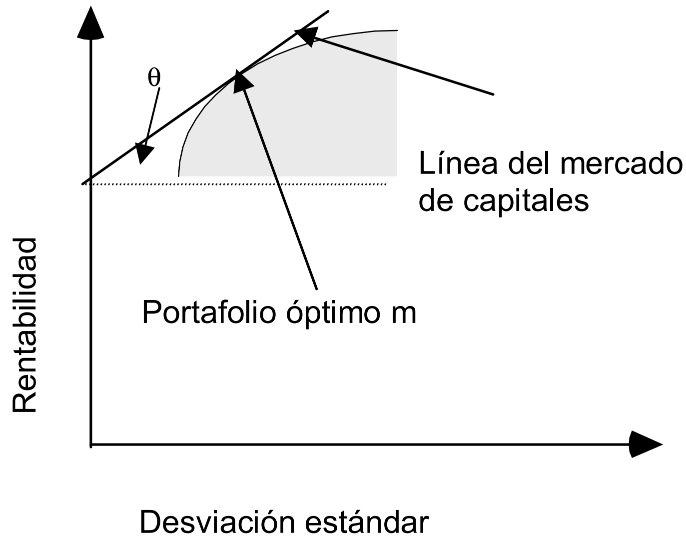


Figura 1. Línea del Mercado de Capitales, frontera eficiente y portafolio óptimo.

La solución de este problema produce las α_i y con ellas se puede calcular el valor de R_m y el valor de la varianza (desviación estándar del portafolio). Hecho esto, el decisor tomará la decisión de reducir aún más su riesgo —sacrificando algo de rentabilidad— combinando ese portafolio con papeles libres de riesgo. Debe recordarse que el *teorema de separación* propuesto por *Tobin* dice que este portafolio *m* será el escogido por el decisor independientemente de su función de utilidad.

He examinado la solución de portafolio óptimo con base en datos históricos de la Bolsa de Bogota y el portafolio óptimo resultante se compone de muy pocas acciones (en algunos casos la solución óptima sólo tiene una acción). Esto aparentemente contradice la teoría detrás de la selección de portafolio: diversificar. Sin embargo, cuando se compara con lo que ocurre en la práctica, tal y como lo hacen los corredores de bolsa, se encuentra que ellos de manera intuitiva configuran portafolio s de muy pocas acciones, predominantemente con una o dos acciones. Los resultados preliminares de este trabajo de grado dirigido por la profesora Irina Dubova de la Universidad Javeriana, tienden a confirmar esta idea.

Supongamos que se cuenta con 4 acciones, se escoge una tasa libre de riesgo de acuerdo con lo que ocurre en la economía, por ejemplo 1,5%, y se utiliza *Solver* de *Excel*. En este caso, se maximiza la tangente conformada por la rentabilidad promedio del portafolio menos la rentabilidad libre de riesgo y la desviación estándar del portafolio. Las restricciones son que las participaciones sumen 1 y que las participaciones no sean negativas (se puede eliminar esta restricción y en ese caso se considera que se está en posición corta). Con este procedimiento se obtiene el portafolio óptimo.

Suponga que las rentabilidades de las cuatro acciones son:

Mes	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
1	18.25%	19.13%	18.87%	7.59%
2	2.03%	2.14%	13.42%	-7.83%
3	-11.15%	-5.27%	2.32%	-25.11%
4	-14.50%	-6.27%	-10.81%	-10.08%
5	21.37%	4.01%	-21.58%	11.54%
6	14.28%	4.00%	12.57%	-13.72%
7	11.50%	9.40%	15.42%	-18.73%
8	-6.11%	-4.04%	-6.32%	11.50%
9	-2.81%	-1.07%	5.71%	18.72%
10	-14.23%	-8.56%	4.00%	9.25%
11	-10.71%	-8.83%	2.12%	20.02%
12	15.15%	10.22%	-24.44%	15.72%
Promedio	1.92%	1.24%	0.94%	1.57%
Varianza	1.68%	0.68%	1.83%	2.26%
Desviación standard	12.95%	8.23%	13.54%	15.03%
Peso	25%	25%	25%	25%

La matriz de exceso de rentabilidad sobre el promedio es:

Mes	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
1	16.33%	17.89%	17.93%	6.02%
2	0.11%	0.90%	12.48%	-9.40%
3	-13.07%	-6.51%	1.38%	-26.68%
4	-16.42%	-7.51%	-11.75%	-11.65%
5	19.45%	2.77%	-22.52%	9.97%
6	12.36%	2.76%	11.63%	-15.29%
7	9.58%	8.16%	14.48%	-20.30%
8	-8.03%	-5.28%	-7.26%	9.93%
9	-4.73%	-2.31%	4.77%	17.15%
10	-16.15%	-9.80%	3.06%	7.68%
11	-12.63%	-10.07%	1.18%	18.45%
12	13.23%	8.98%	-25.38%	14.15%

La matriz traspuesta se encuentra con la function de Búsqueda y referencia = =TRANSPONER(Matriz) de Excel. Se muestran los porcentajes.

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Acción 1	16.33	0.11	-13.07	-16.42	19.45	12.36	9.58	-8.03	-4.73	-16.15	-12.63	13.23
Acción 2	17.89	0.90	-6.51	-7.51	2.77	2.76	8.16	-5.28	-2.31	-9.80	-10.07	8.98
Acción 3	17.93	12.48	1.38	-11.75	-22.52	11.63	14.48	-7.26	4.77	3.06	1.18	-25.38
Acción 4	6.02	-9.40	-26.68	-11.65	9.97	-15.29	-20.30	9.93	17.15	7.68	18.45	14.15

Por multiplicación de matrices y dividiendo por el número de observaciones (n=12), entonces la matriz de covarianza es:

	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
Acción 1	0.01676831	0.00936991	-0.00042371	0.00097519
Acción 2	0.00936991	0.00677348	0.00213887	-0.00038209
Acción 3	-0.00042371	0.00213887	0.01833034	-0.00758114
Acción 4	0.00097519	-0.00038209	-0.00758114	0.02258129

El procedimiento a seguir es:

1. Defina un vector de proporciones que indique el peso de cada acción.

Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
25%	25%	25%	25%

2. Calcule la rentabilidad promedio del portafolio. Es el producto escalar del vector de proporciones por el vector de rentabilidades (el vector de rentabilidades es la rentabilidad promedio de cada una de las acciones en la primera tabla). En Excel use SUMAPRODUCTO. Para este vector de proporciones (25% cada una) la rentabilidad del portafolio es 1,42%.
3. Multiplique el vector de proporciones por la matriz de covarianza (obtendrá como respuesta un vector). Use la función de Excel para multiplicar matrices. En el ejemplo,

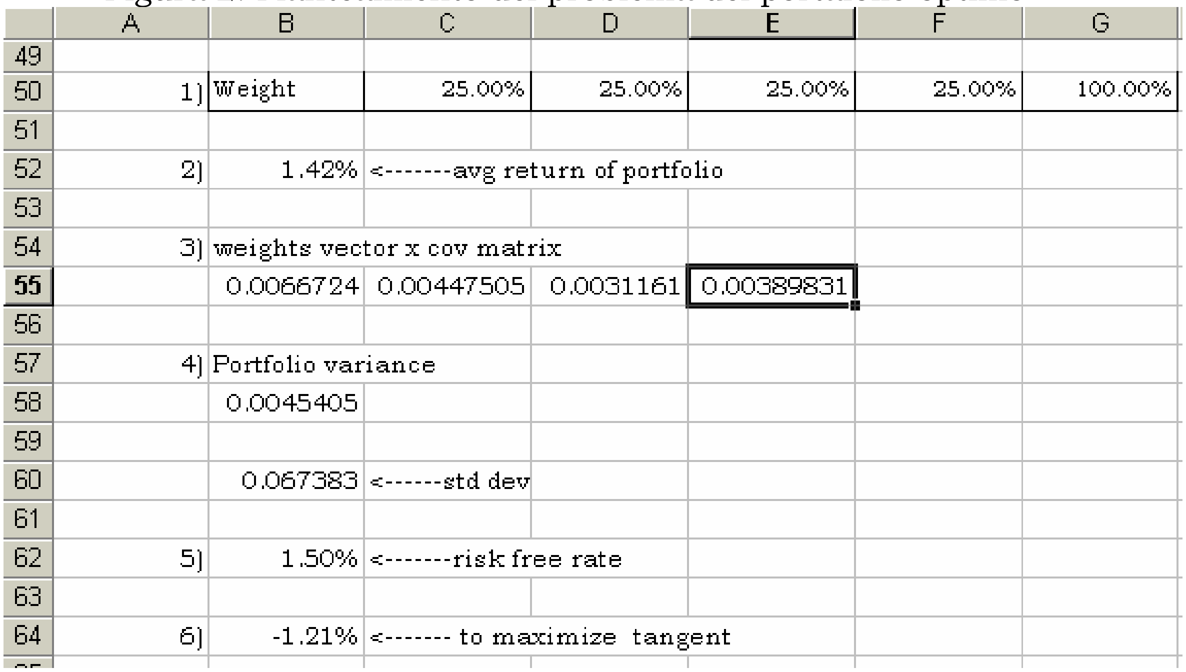
	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
Vector de pesos x matriz de covarianza	0.00667243	0.004475046	0.00311609	0.00389831

4. La varianza del portafolio se calcula como el producto escalar del vector de proporciones o pesos por el vector que se obtiene en 3. En este ejemplo la varianza del portafolio es 0,00454047. La desviación estándar del portafolio es la raíz cuadrada de la varianza.
5. Si se supone que la tasa libre de riesgo es 1,5%, entonces se construye la expresión para la tangente:

$$tn\theta = \frac{R_m - r}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k\alpha_j\sigma_{kj}}}$$

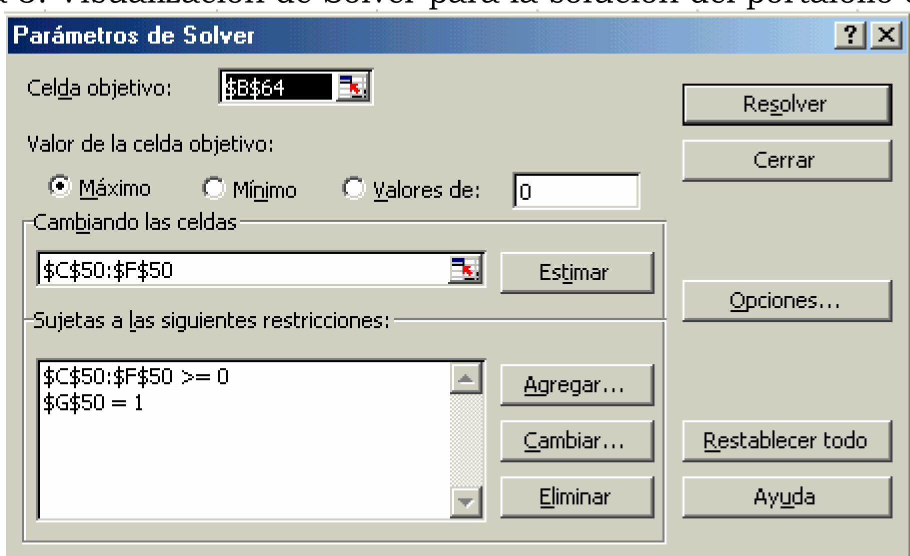
6. Use Solver para maximizar la tangente, sujeta a las condiciones que la suma de las proporciones o pesos sea igual a 1 y que las proporciones o pesos sean no negativos.
7. En las figuras 2 y 3 se ve la operación en Excel.

Figura 2. Planteamiento del problema del portafolio óptimo



	A	B	C	D	E	F	G
49							
50	1)	Weight	25.00%	25.00%	25.00%	25.00%	100.00%
51							
52	2)	1.42%	<-------avg return of portfolio				
53							
54	3)	weights vector x cov matrix					
55		0.0066724	0.00447505	0.0031161	0.00389831		
56							
57	4)	Portfolio variance					
58		0.0045405					
59							
60		0.067383	<------std dev				
61							
62	5)	1.50%	<-------risk free rate				
63							
64	6)	-1.21%	<------- to maximize tangent				

Figura 3. Visualización de Solver para la solución del portafolio óptimo



8. Cuando se oprime el botón Resolver se obtiene la composición del portafolio óptimo.

	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
Pesos	92,18%	0,00%	0,00%	7,82%

Esto produce una rentabilidad para el portafolio de 1,90% y una varianza de 0,12052486.

Bibliographic References

Benninga, Simon Z. (1997),*Financial Modeli*ng, MIT Press.

Black, F. (1972). "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing." *Journal of Business* 45 (July), 444-455.

Levy, Haim and Marshall Sarnat (1982), *Capital Investment and Financial Decisio*ns, 2 nd Ed. Prentice Hall.

Merton, R. C. (1973), "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7 (September), 1851-1872.

Elton Edwin J. and Martin Jay Gruber (1995), *Modern portfolio theory and investment analys*is, Wiley.