

EL PUNTO MUERTO FINANCIERO DE UN PROYECTO DE INVERSION SIMPLE EN FUNCION DE LA TASA DE DESCUENTO CON UN ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Domingo A. Tarzia

Universidad Austral – CONICET

SUMARIO: 1. Introducción; 2. Proyecto de inversión dependiente de la variable cantidad Q ; 3. Cálculo numérico del proyecto de inversión simple; 4. Análisis de sensibilidad del proyecto de inversión simple; 5. Conclusiones.

Para comentarios: Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

Resumen. Se considera un proyecto de inversión que tiene los siguientes parámetros sobre los cuales se realizan las siguientes hipótesis de trabajo: $I > 0$: Inversión inicial que se realiza de una sola vez y se amortiza totalmente en n años; n : Cantidad de años de duración del proyecto de inversión en el cual se realizan las mismas actividades y se considera que la compañía vende un solo producto; $A > 0$: Amortización anual ($A = I/n$); $Q > 0$: Cantidad de unidades del producto vendidas por año; $C_v > 0$: Costo variable por unidad para producir el producto; $p > 0$: Precio de venta por unidad del producto con $p > C_v$; $C_f > 0$: Costo fijo anual de la compañía; t_{ig} : Tasa del impuesto a las ganancias (en tanto por uno); r : Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno); Se desprecia la inflación anual de precios.

Se obtiene la expresión explícita del Valor Actual Neto (VAN) del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q y se determina explícitamente el punto muerto (break even point) financiero Q_f (es decir la cantidad de unidades vendidas Q que hace que el VAN sea nulo) en función de los parámetros restantes del problema $I, n, C_v, C_f, t_{ig}, r, p$. En particular, se estudia su comportamiento respecto de la tasa de descuento r y se demuestra que: (i) Cuando la tasa de descuento r es despreciable el punto muerto financiero tiende al punto muerto contable es decir, el valor de Q que anula el Beneficio antes de Impuestos BAT; (ii) Cuando la tasa de descuento r es muy grande la gráfica de la función $Q_f = Q_f(r)$ tiene por asíntota una línea recta de pendiente positiva. Por otro lado, $Q_f(r)$ es una función estrictamente creciente y convexa en la variable r .

También se realiza un análisis de sensibilidad del proyecto de inversión respecto del precio unitario p , del costo variable unitario C_v y del costo fijo anual C_f alrededor de un punto de referencia caracterizado por la tasa de descuento $r = 0,10$ anual y se obtiene que el costo variable unitario C_v y el precio unitario p tienen una influencia muy apreciable en el punto muerto financiero de la cantidad Q ; en cambio la influencia del costo fijo anual C_f es poco apreciable.

1. Introducción

En finanzas una inversión es cualquier erogación de capital con la intención de obtener un retorno en el futuro que pueda recuperar la inversión original y además genere una utilidad adicional. En el presente trabajo se considerará un proyecto de inversión simple en el cual se realiza solamente una inversión inicial I (flujo de fondo con signo negativo) y en los n años de duración del mismo se tendrán flujos de fondos de signo positivo.

Es muy importante la evaluación del proyecto de inversión para poder conocer si el mismo es o no es rentable. Existen varios criterios para la evaluación (Machain, 2002; Sapag Chain, 2001] como son: el *valor actual neto* (conocido como VAN), la *tasa interna de retorno* (conocida como TIR), el *período de recuperación de la inversión* (conocido como PRI) y la *rentabilidad inmediata* (conocido como RI).

En este trabajo se utilizará el Valor Actual Neto o VAN como criterio de evaluación. El VAN es aquel que permite determinar la valoración de una inversión en función de la diferencia entre el valor actualizado de todos los cobros derivados de la inversión y todos los pagos actualizados originados por la misma a lo largo del plazo de la inversión realizada. En otras palabras, el VAN de un proyecto es igual a la sumatoria de los valores actuales (al momento cero) de todos los flujos de fondos (negativos y positivos) que genera el mismo proyecto. La inversión será aconsejable si su VAN es positivo. La sumatoria de los valores actuales de los flujos puede presentar, en cuanto a su signo, tres situaciones, las que se interpretan a continuación [Baker and Fox, 2003; Brealey and Myers, 1993; Reichelstein, 2000; Sapag Chain, 2001; Vanhoucke et al., 2001):

(i) Un VAN positivo indica que:

- se recupera la inversión a valores nominales,
- se obtiene el retorno requerido sobre la inversión,
- se obtiene un remanente sobre el retorno requerido por el inversor.

(ii) Un VAN negativo indica que:

- se puede o no cubrir la inversión a valores nominales,
- no cubre las expectativas de retorno del inversor,
- no se obtiene ningún remanente.

(iii) Un VAN cero indica que cubre exactamente la devolución del capital nominal más el retorno requerido representado por la tasa utilizada para descontar los fondos al momento 0. En términos “económicos-empresarios” no se “agrega” ni se “destruye” valor.

Se estudiará un proyecto de inversión con la existencia de una sola variable independiente (en el presente trabajo será la cantidad de unidades Q a vender) que puede hacer, según los valores que adopte, que el proyecto sea viable o no. En este caso, el VAN será una función de dicha variable con lo cual será de mucha importancia poder encontrar el valor de dicha variable

independiente que haga que el correspondiente VAN sea nulo. Se define como Punto Muerto (Break even point) Financiero el valor de la variable independiente para el cual el VAN es nulo.

Planteo del problema, hipótesis y resultados obtenidos. En el proyecto de inversión a estudiar se tienen los siguientes parámetros:

- I : Inversión inicial. Se considera un proyecto de inversión simple que tiene una inversión inicial que se realiza en el año cero (antes del comienzo del año 1 correspondiente al primer año del desarrollo del proyecto de inversión). Dimensión: $[I] = \$$;
- n : cantidad de años de duración del proyecto de inversión. Dimensión: $[n] = 1$;
- A : Amortización anual. Es la parte anual de la inversión que permite bajar (mejorar) el pago de impuestos a las ganancias. Dimensión: $[A] = \$$;
- $Q(Q_t)$: Cantidad de unidades del producto vendidas por año (en el año t). Dimensión: $[Q] = \# \text{ unidades}$;
- p : Precio de venta unitario al que la Compañía vende cada producto. Dimensión: $[p] = \$/\text{unidad}$;
- C_v : Costo variable por unidad para producir el producto. Dimensión: $[C_v] = \$/\text{unidad}$;
- C_f : Costo fijo anual de la Compañía. Dimensión: $[C_f] = \$$;
- t_{ig} : Tasa del impuesto a las Ganancias (en tanto por uno). Dimensión: $[t_{ig}] = 1$;
- r : Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno). Dimensión: $[r] = 1$;
- t : referente al año t ($t = 0, 1, \dots, n$). Dimensión: $[t] = 1$.

En Fernandez Blanco (1991) se realiza un estudio del VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r ; se demuestra solamente que el VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r es una función estrictamente decreciente y convexa. Dicho estudio no es completo y se espera poder ampliarlo adecuadamente realizando además un análisis de sensibilidad.

En el proyecto de inversión simple se considerarán las siguientes hipótesis de trabajo:

- Toda la inversión I se realiza de una sola vez y en el año 0;
- La inversión inicial se amortiza totalmente en n años, con lo cual la amortización anual está dada por:

$$A = \frac{I}{n}$$

- Se desprecia la inflación anual de precios;
- En los n períodos de tiempo de duración del proyecto de inversión se realizan las mismas actividades, excepto que se indique lo contrario;
- Se considera que la compañía vende un solo producto (el cual lo podría producir o comprarlo para luego revenderlo);
- Se supone que el precio de venta del producto es mayor que el correspondiente costo variable de producción, es decir

$$p > C_v.$$

El propósito de este trabajo es el de obtener la expresión explícita del VAN del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q en cuyo caso será $VAN(Q)$. También se determinará explícitamente el Punto Muerto Financiero, es decir, la cantidad de unidades vendidas Q que hace que el VAN sea nulo, en un proyecto de inversión simple, en función de los parámetros restantes del problema $(I, n, C_v, C_f, t_{ig}, r, p)$. En particular, se estudiará matemáticamente (analítica y gráficamente) su comportamiento respecto de la tasa de descuento o costo de oportunidad r . Se demostrará que:

- (i) Cuando la tasa de descuento r es despreciable (es decir, cuando r tiende a cero) el Punto Muerto Financiero, para la variable de cantidad Q , tiende al Punto Muerto Contable.
- (ii) Cuando la tasa de descuento r es muy grande (es decir, cuando r tiende a infinito) la gráfica de la función $Q_f = Q_f(r)$ tiene por asíntota una línea recta; en este caso, se calcularán la pendiente (inclinación) y la ordenada al origen de la correspondiente recta asíntota. Por otro lado, $Q_f(r)$ es una función estrictamente creciente y convexa en la variable r .

También se realizará un análisis de sensibilidad del proyecto de inversión respecto del precio unitario p , del costo variable unitario C_v y del costo fijo anual C_f alrededor de un punto de referencia caracterizado por la tasa de descuento $r = 0,10$ anual determinándose que la influencia del costo variable unitario C_v y del precio unitario p es muy apreciable respecto del punto muerto financiero respecto de la cantidad Q ; en cambio la influencia del costo fijo anual C_f es poco apreciable.

2. Proyecto de inversión dependiente de la variable cantidad Q

Se supone que en cada año ($i = 1, 2, \dots, n$) se realizan las mismas operaciones, es decir que los parámetros $Q, p, C_f, C_v, r, t_{ig}$ son constantes durante los n años de duración del proyecto de inversión. Para cada año t ($t = 1, 2, \dots, n$) se tiene:

Año	t
Ingresos (precio por cantidad)	pQ
Costos variables	$C_v Q$
Costos fijos	C_f
Amortización	$A = \frac{I}{n}$
Beneficios antes de impuestos (BAT)	$BAT = pQ - C_v Q - C_f - A =$ $(p - C_v)Q - C_f - A$
Impuesto a las Ganancias (IG en \$)	$IG = t_{ig} [(p - C_v)Q - C_f - A]$
Beneficio Neto ($BN = BAT - IG$ en \$)	$BN = (1 - t_{ig}) [(p - C_v)Q - C_f - A]$
Flujo de Tesorería Neto ($F \equiv FTN = BN + A$ en \$)	$F = (1 - t_{ig}) [(p - C_v)Q - C_f - A] + A$

$$\begin{aligned}
 &= (1-t_{ig})[(p-C_v)Q-C_f] - (1-t_{ig})A + A \\
 &= (1-t_{ig})[(p-C_v)Q-C_f] + t_{ig}A \\
 \text{Factor de descuento para el año } t & \quad \frac{1}{(1+r)^t}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la inversión I se realiza en el período 0 se tiene que el correspondiente VAN (con dimensión $[VAN]=\$$) de este proyecto de inversión simple viene dado por $-I$ más los valores actuales de todos los flujos de fondos F constantes obtenidos en cada año t variando t desde 1 a n , es decir (Villalobos, 2001):

$$\begin{aligned}
 VAN(Q) &= -I + \sum_{t=1}^n \frac{F}{(1+r)^t} = -I + F \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] \\
 (1) \quad &= -I + \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] \left[(1-t_{ig})(p-C_v)Q - (1-t_{ig})C_f + t_{ig}A \right] = h + mQ
 \end{aligned}$$

que resulta ser una función afín de la variable Q (la representación gráfica de $VAN(Q)$ es una recta en la variable Q) donde se han definido $h = h(r)$ (ordenada al origen de la recta en función del parámetro tasa de descuento r) y $m = m(r)$ (pendiente de la recta en función del parámetro tasa de descuento r) de la siguiente manera:

$$(2) \quad h = h(r) = -I + f(r) \left[t_{ig}A - (1-t_{ig})C_f \right]$$

$$(3) \quad m = m(r) = f(r)(p-C_v)(1-t_{ig}) > 0,$$

donde la función real $f = f(r)$ está definida de la siguiente manera:

$$(4) \quad f(r) = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right], \quad r > 0,$$

y las correspondientes dimensiones son:

$$(5) \quad [h(r)] = \$, \quad [m(r)] = \$/\text{unidad}, \quad [f(r)] = 1.$$

Teniendo en cuenta que el punto muerto financiero Q_f está definido como aquel valor de Q que anula el $VAN(Q)$, se obtiene:

$$VAN(Q_f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h + mQ_f = 0$$

es decir:

$$(6) \quad Q_f = \left\{ (1-t_{ig})C_f - t_{ig}A + \frac{I}{f(r)} \right\} \frac{1}{(p-C_v)(1-t_{ig})} = -\frac{h}{m}$$

de donde surge que el punto muerto financiero Q_f , en función de la tasa de descuento r , viene dado por la siguiente expresión:

$$(7) \quad Q_f(r) = a + b \frac{1}{f(r)}$$

donde los coeficientes reales a y b están dados por:

$$(8) \quad a = \frac{C_f - t_{ig}(C_f + A)}{(p - C_v)(1 - t_{ig})}$$

$$(9) \quad b = \frac{I}{(p - C_v)(1 - t_{ig})} > 0$$

cuyas dimensiones son:

$$(10) \quad [Q_f(r)] = \# \text{ unidades}, \quad [a] = \# \text{ unidades}, \quad [b] = \# \text{ unidades}.$$

Teniendo en cuenta el punto muerto financiero Q_f el $VAN(Q) = VAN(Q, r)$, dado por (1), se puede expresar de una manera equivalente dado por:

$$(11) \quad \begin{aligned} VAN(Q, r) &= -I + f(r)[t_{ig}A - (1 - t_{ig})C_f] + f(r)(p - C_v)(1 - t_{ig})Q \\ &= m(r)[Q - Q_f(r)] \end{aligned}$$

con lo cual se ha expresado el VAN en función de la variable Q y del parámetro tasa de descuento (o nueva variable) r y del punto muerto financiero $Q_f(r)$, obteniéndose la siguiente propiedad.

Teorema 1:

Para el proyecto de inversión se tienen las siguientes propiedades:

- (i) El VAN , en función de la variable independiente cantidad de unidades vendidas Q , viene dado por (1) donde la ordenada al origen h y la pendiente m están expresadas por (2) y (3) respectivamente donde $f = f(r)$ es la función real definida por (4).
- (ii) El punto muerto financiero Q_f respecto de la cantidad Q está dado, en función de la tasa de descuento r , por la siguiente expresión:

$$(12) \quad Q_f(r) = a + b F(r)$$

donde la función real $F = F(r)$ (con dimensión $[F(r)] = 1$) viene definida por

$$(13) \quad F(r) = \frac{1}{f(r)}, \quad r > 0$$

y los coeficientes a y b están dados por las expresiones (8) y (9) respectivamente.

- (iii) El $VAN(Q, r)$ también puede calcularse en función de Q_f , por la expresión (11). ■

Observación 1:

Se puede observar que el signo del $VAN(Q)$, en función del punto muerto financiero $Q_f(r)$, viene dado por:

$$(14) \quad VAN(Q) \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow Q > Q_f(r) \\ = 0 \Leftrightarrow Q = Q_f(r) \\ < 0 \Leftrightarrow 0 \leq Q < Q_f(r). \end{cases} \quad \blacksquare$$

A los efectos de estudiar matemáticamente el comportamiento de la función $VAN(Q)$ se necesitan previamente el comportamiento de las funciones $f(r)$ y $F(r)$ definidas por (4) y (13) respectivamente que tienen las siguientes propiedades:

Teorema 2:

(i) La función $f = f(r)$ es una función estrictamente decreciente y convexa (cóncava hacia arriba) de la variable tasa de descuento r con las siguientes propiedades:

$$(15) \quad f(0^+) = n > 0, \quad f(+\infty) = 0,$$

$$(16) \quad \frac{df(r)}{dr} = f'(r) = -\frac{G(r)}{r^2(1+r)^{n+1}} < 0, \quad \forall r > 0$$

$$(17) \quad f'(0^+) = -\frac{n(n+1)}{2}, \quad f'(+\infty) = 0,$$

$$(18) \quad f''(r) = \frac{H(r)}{r^3(1+r)^{n+2}} > 0, \quad \forall r > 0$$

$$(19) \quad f''(0^+) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad f''(+\infty) = 0$$

donde las funciones reales $G = G(r)$ y $H = H(r)$ (con dimensiones $[G(r)] = [F(r)] = 1$) están definidas por:

$$(20) \quad G(r) = (1+r)^{n+1} - 1 - (n+1)r, \quad r > 0$$

$$(21) \quad H(r) = 2(1+r)^{n+2} - 2 - 2(n+2)r - (n+1)(n+2)r^2, \quad r > 0$$

que tienen las siguientes propiedades:

$$(22) \quad G(0^+) = 0, \quad G(+\infty) = +\infty, \quad G(r) > 0, \quad \forall r > 0$$

$$(23) \quad H(0^+) = 0, \quad H(+\infty) = +\infty, \quad H(r) > 0, \quad \forall r > 0.$$

(ii) La función $F = F(r)$, definida en (13), es estrictamente creciente y tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua dada por la ecuación $y = r$ (recta de pendiente 1 y ordenada al origen 0) y tiene además las siguientes propiedades:

$$(24) \quad F(0^+) = \frac{1}{n}, \quad F(+\infty) = +\infty,$$

$$(25) \quad \frac{1}{2} < F'(0^+) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 1, \quad \forall n > 1$$

$$(26) \quad F''(0^+) = \frac{n^2 - 1}{6n},$$

$$(27) \quad 0 < F(r) - r < \frac{1}{n}, \quad \forall r > 0, \quad \forall n > 1.$$

Demostración.

Todas las propiedades de las funciones f, F, G y H se demuestran utilizando el análisis matemático de las funciones reales (derivada, regla de l'Hopital, crecimiento y convexidad de funciones, asíntotas oblicuas, etc.). Más detalles pueden verse en (Tarzia, 2006). ■

Se define el **Punto Muerto Contable** Q_c (con dimensión $[Q_c] = \# \text{ unidades}$) como el valor de Q que anula el Beneficio antes de Impuestos BAT , el cual viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} BAT(Q_c) = 0 &\Leftrightarrow (p - C_v)Q_c - C_f - A = 0 \Leftrightarrow \\ (28) \quad Q_c &= \frac{C_f + A}{p - C_v} \end{aligned}$$

Teorema 3:

El punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r)$, dado por (12), es una función estrictamente creciente de la tasa de descuento r y tiene las siguientes propiedades:

$$(29) \quad Q_f(0^+) = a + \frac{b}{n} = Q_c, \quad Q_f(+\infty) = +\infty,$$

$$(30) \quad \frac{dQ_f(r)}{dr} > 0, \quad \forall r > 0,$$

$$(31) \quad 0 < \frac{b}{2} < \frac{dQ_f(0^+)}{dr} = \frac{b}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) < b.$$

Además, la curva $y = Q_f(r)$ tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua dada por la recta de ecuación

$$(32) \quad y = a + b r$$

que tiene pendiente $b > 0$ y ordenada al origen a , definidos en (9) y (8) respectivamente.

Demostración.-

Debido a las propiedades de la función $f = f(r)$ o en su defecto de la función $F = F(r)$ obtenidas en el Teorema 2, se tiene el siguiente resultado:

$$(33) \quad Q_f(0^+) = a + bF(0^+) = a + \frac{b}{n} = \frac{C_f + A}{p - C_v} = Q_c$$

valor límite que resulta ser el punto muerto contable Q_c definido por (28). Por otro lado se tienen las propiedades siguientes:

$$(34) \quad Q_f(+\infty) = a + bF(+\infty) = +\infty$$

$$(35) \quad \frac{dQ_f(r)}{dr} = bF'(r) > 0, \quad \forall r > 0$$

$$(36) \quad \frac{b}{2} < \frac{dQ_f(0^+)}{dr} = bF'(0) = \frac{b}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) < b, \quad \forall n > 1.$$

Además, como la curva $y = F(r)$ tiene en $r = +\infty$ una recta asíntota oblicua de ecuación $y = r$ entonces la curva $y = Q_f(r)$ tendrá en $r = +\infty$ una recta asíntota de ecuación $y = a + br$ pues:

$$i) \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{Q_f(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{a + bF(r)}{r} = b \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{F(r)}{r} = b,$$

$$(37) \quad \text{ii) } \lim_{r \rightarrow +\infty} [Q_f(r) - br] = \lim_{r \rightarrow +\infty} [a + bF(r) - br] = a + b \lim_{r \rightarrow +\infty} (F(r) - r) = a. \quad \blacksquare$$

Observación 2:

Por lo visto anteriormente se tiene una interesante propiedad contable-financiera: el límite del punto muerto financiero para la cantidad de unidades vendidas cuando la tasa de descuento tiende a cero (es decir, tasa de descuento despreciable o muy baja) es el punto muerto contable para la cantidad de unidades vendidas. \blacksquare

Observación 3:

El punto muerto financiero del proyecto de inversión simple en función de la tasa de descuento r está representado por una función estrictamente creciente $y = Q_f(r)$ que parte en $r = 0$ de $Q_f(0^+) = a + b/n = Q_c$ (punto muerto contable) y en $r = +\infty$ tiende asintóticamente a la recta de ecuación $y = a + br$ donde a y b están definidos en (8) y (9) respectivamente.

Por otro lado, la curva $y = Q_f(r)$ parte en $r = 0$ con una pendiente inicial $Q_f'(0^+)$ que tiene un valor comprendido entre $b/2$ y b , menor que la pendiente b de la recta asíntota en $r = +\infty$. \blacksquare

A continuación, se estudiará el VAN como una función real de dos variables independientes: la tasa de descuento r y la cantidad de unidades vendidas Q .

Teorema 4:

(i) La función real VAN de las dos variables independientes Q (cantidad constante de unidades vendidas por año) y r (tasa de descuento) está dado por:

$$(38) \quad VAN(Q, r) = (p - C_v)(1 - t_{ig})f(r)(Q - a) - I$$

donde la función $f = f(r)$ está definida en (4).

(ii) $VAN(Q, r)$ es una función estrictamente creciente en la variable Q y estrictamente decreciente en la variable r asumiendo para los valores extremos de Q y de r las siguientes expresiones:

$$(39) \quad VAN(Q, +\infty) = \lim_{r \rightarrow +\infty} VAN(Q, r) = -I < 0, \quad \forall Q > 0$$

$$(40) \quad VAN(Q, 0^+) = \lim_{r \rightarrow 0^+} VAN(Q, r) = n(p - C_v)(1 - t_{ig})(Q - Q_c), \quad \forall Q > 0$$

$$(41) \quad VAN(0^+, r) = \lim_{Q \rightarrow 0^+} VAN(Q, r) = h(r), \quad \forall r > 0$$

$$(42) \quad VAN(+\infty, r) = \lim_{Q \rightarrow +\infty} VAN(Q, r) = +\infty, \quad \forall r > 0$$

donde Q_c es el punto muerto contable definido en (28), y $h = h(r)$ es la función real definida en (2).

(iii) La función real $h = h(r)$ tiene las siguientes propiedades:

$$(43) \quad h(0^+) = -(1-t_{ig})n(A+C_f) < 0, \quad h(+\infty) = -I < 0$$

y es estrictamente creciente (decreciente) cuando $At_{ig} < C_f(1-t_{ig})$ ($At_{ig} > C_f(1-t_{ig})$). En el caso particular $At_{ig} = C_f(1-t_{ig})$ se tiene que $h = h(r)$ es una función constante de valor $h(r) = -I < 0, \forall r > 0$.

Demostración.

Las propiedades surgen de los resultados obtenidos previamente y del análisis matemático de funciones reales. Más detalles pueden verse en Tarzia (2006). En particular, las derivadas parciales de $VAN(Q, r)$ respecto de las variables Q y r vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$(44) \quad \frac{\partial VAN}{\partial Q}(Q, r) = (p - C_v)(1-t_{ig})f(r) > 0, \quad \forall Q, r > 0$$

$$(45) \quad \frac{\partial VAN}{\partial r}(Q, r) = (p - C_v)(1-t_{ig})Qf'(r) < 0, \quad \forall Q, r > 0$$

con lo cual el VAN es una función estrictamente creciente en la variable cantidad de unidades vendidas Q y estrictamente decreciente en la variable tasa de descuento r .

Por otro lado, la derivada de la función $h = h(r)$ viene dada por:

$$(46) \quad h'(r) = \left[C_f(1-t_{ig}) - At_{ig} \right] \frac{G(r)}{r^2(1+r)^n}, \quad \forall r > 0$$

donde $G = G(r)$ está definida en (20).

El signo de $h'(r)$ depende del signo de $\left[C_f(1-t_{ig}) - At_{ig} \right]$, el cual será positivo (es decir h es estrictamente creciente en r) cuando $At_{ig} < C_f(1-t_{ig})$ y será negativo (es decir h es estrictamente decreciente en r) cuando $At_{ig} > C_f(1-t_{ig})$. En el caso particular en que se tenga $At_{ig} = C_f(1-t_{ig})$ se deduce que $h'(r) = 0, \forall r > 0$ con lo cual $h(r)$ es una constante $\forall r > 0$ dada por $h(r) = -I$. ■

Observación 5:

En el Teorema 4 se mostró que el comportamiento de crecimiento o decrecimiento de la función real $h = h(r)$ está supeditado al signo de la expresión:

$$(47) \quad C_f(1-t_{ig}) - At_{ig}.$$

Cada término puede interpretarse de la siguiente manera:

- At_{ig} : es el ahorro impositivo anual debido a la amortización $A = I/n$ de la inversión I ;
- $C_f(1-t_{ig})$: es el verdadero costo fijo anual después de pagar impuestos a las ganancias. ■

Observación 6:

Como $VAN(Q, r)$ es una función estrictamente decreciente en la variable r , para cada cantidad $Q > 0$ dada, significa que el VAN tiene menores valores a medida que r crece con lo cual habrá que aumentar la cantidad Q para equilibrarlo. Este hecho se puede apreciar en toda su magnitud en el cálculo explícito, realizado anteriormente, del punto muerto financiero $Q_f(r)$ que es una función creciente de la tasa de descuento r . El VAN del proyecto inversión tiene la expresión (11) en función de las dos variables independientes Q , r y de los parámetros I , n , p , C_v , $A = I/n$, C_f , t_{ig} . Es muy importante analizar cuando el VAN es positivo, nulo o negativo en función de sus dos variables independientes.

El VAN nulo puede interpretarse como la curva de nivel cero de $VAN = VAN(Q, r)$, la cual puede deducirse a partir de la siguiente equivalencia:

$$(48) \quad VAN(Q, r) = 0 \Leftrightarrow (p - C_v)(1 - t_{ig})f(r)(Q - a) = I \Leftrightarrow$$

$$Q = a + \frac{I}{(p - C_v)(1 - t_{ig})f(r)} = a + \frac{b}{f(r)} = Q_f(r)$$

y por ende la curva de nivel cero del $VAN(Q, r)$ viene expresada por la curva en el plano Q , r de ecuación

$$(49) \quad Q = Q_f(r), \quad \forall r > 0$$

o su equivalente

$$(50) \quad r = Q_f^{-1}(Q), \quad Q > Q_c$$

donde $Q_f(r)$ se interpreta como el punto muerto financiero de la cantidad de unidades vendidas en función de la tasa de descuento r y Q_f^{-1} es la función inversa de Q_f la cual está definida $\forall Q > Q_c$, donde Q_c es el punto muerto contable para la cantidad de unidades vendidas dado por (28). ■

3. Cálculo numérico del proyecto de inversión simple

A continuación se realizarán los cálculos numéricos correspondientes a los siguientes ejemplos como asimismo las correspondientes simulaciones mediante el software Excel.

Ejemplo 1. Se consideran los siguientes datos del proyecto de inversión simple:

- Inversión inicial: $I = 150000$ (\$);
- Cantidad de años de duración del proyecto: $n = 10$;
- Amortización anual: $A = 15000$ (\$);
- Precio de venta por unidad: $p = 3,70$ (\$/unidad);
- Costo variable de producción por unidad: $C_v = 3,00$ (\$/unidad);
- Costo fijo anual: $C_f = 30000$ (\$);
- Tasa del impuesto a las ganancias: $t_{ig} = 0,35$ (35%);

- Tasa de descuento o costo de oportunidad: $r = 0,10$ (10 % anual);

Teniendo en cuenta los resultados teóricos obtenidos en la sección anterior se tienen los siguientes valores:

$$a = \frac{C_f - t_{ig}(C_f + A)}{(p - C_v)(1 - t_{ig})} = \frac{30000 - 0,35(30000 + 15000)}{(3,70 - 3)0,65} = \frac{14250}{0,455} = 31318,68$$

$$b = \frac{I}{(p - C_v)(1 - t_{ig})} = \frac{150000}{(3,70 - 3)0,65} = \frac{150000}{0,455} = 329670,33$$

$$Q_c = \frac{C_f + A}{p - C_v} = a + \frac{b}{n} = \frac{30000 + 15000}{3,70 - 3} = \frac{45000}{0,70} = 64285,71$$

$$t_{ig}A - (1 - t_{ig})C_f = -C_f + t_{ig}(C_f + A) = -14250$$

$$f = f(r) = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] = \frac{1}{0,10} \left[1 - \frac{1}{(1,10)^{10}} \right] = 6,14$$

$$h = h(r) = -I + f(r) [t_{ig}A - (1 - t_{ig})C_f] = -237560,08$$

$$m = m(r) = f(r)(p - C_v)(1 - t_{ig}) = 2,80$$

$$Q_f = Q_f(r) = a + \frac{b}{f(r)} = -\frac{h(r)}{m(r)} = 84971,01$$

$$VAN(Q) = h + mQ = 2,80(Q - 84971,01).$$

En los cuadros 1 y 2 se muestran los resultados obtenidos a través de una planilla de cálculo Excel programando el correspondiente proyecto de inversión para las tasas de 9 y 10 % anual.

Cuadro 1 Ejemplo con tasa de descuento de 9% anual

Análisis Proyecto Inversión Simple					
DATOS					
Cantidad Unidades Vendidas Q	82687,94173				
Precio Venta Unitario p =	3,70				
Costo Variable Unitario Cv =	3,00				
Costo Fijo Cf =	30000,00				
Inversión I =	150000,00				
Cantidad de Años n =	10				
Tasa Impuesto a las ganancias Tig =	0,35				
Amortización Anual A = I/n	15000,00				
Tasa de Rent. - Descuento (Costo de Oportunidad) r =	0,09				
Intereses Anuales	0				
I) Determinación del Impuesto a las Ganancias:					
	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Ingresos o Ventas por Año (p * Q)		305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38
Costos Fijos (Cf)		30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00
Costos Variables (Cv * Q)		248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83
BAITA (EBITDA) : Beneficios Antes Int.-Imp.y Amort.		27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56
Amortización Lineal por año		15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00
BAIT (EBIT) : Beneficios Antes Intereses e Impuestos		12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56
Intereses		0,00	0,00	0,00	0,00
BAT (EBT) : Beneficios Antes Impuestos		12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56
Impuesto a las Ganancias (BAT * Tig)		4508,55	4508,55	4508,55	4508,55
BN : Beneficio o Utilidad Neta		8.373,01	8.373,01	8.373,01	8.373,01
II) Calculo del VAN del Proyecto					
Ingresos o Ventas por Año (p * Q)		305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38
Costos Fijos (Cf)		30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00
Costos Variables (Cv * Q)		248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83
BAITA (EBITDA) : Beneficios Antes Int. Imp.y Amort.		27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56
Intereses		0,00	0,00	0,00	0,00
BATA (EBTDA) : Beneficios Antes Impuestos y Amort.		27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56
Inversión	-150.000,00	0	0	0	0
Impuesto a las Ganancias		4508,55	4508,55	4508,55	4508,55
FCF = Flujo Neto Operativo (BN + Amortizaciones)	-150.000,00	23.373,01	23.373,01	23.373,01	23.373,01
Factor de Descuento al 9 % anual	1	0,91743119	0,84168	0,77218348	0,7084252
Valor Presente Correspondiente al Flujo del Año t	-150000,00	21443,1316	19672,5978	18048,2549	16558,0320
VAN = Suma de Todos los Valores Presentes	0,00	3,638E-12			
Otra Forma de Cálculo del FCF:					
FCF = Flujo Neto Operativo (BN + Amortizaciones)	-150.000,00	23373,0135	23373,013	23373,0135	23373,013
(1 - Ti) * ((p-Cv) * Q - Cf) + Ti * A					
Q Punto Muerto Financiero =	82687,94173				
Q Financiero al	50%	60%	70%	80%	90%
Q	41343,97	49612,77	57881,56	66150,35	74419,15
VAN (Q)	-120725,81	-96580,65	-72435,49	-48290,32	-24145,16

Cuadro 1 (cont) Ejemplo con tasa de descuento de 9% anual

Año 5	Año 6	Año 7	Año 8	Año 9	Año 10		
305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38		
30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00		
248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83		
27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56		
15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00		
12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56	12.881,56		
4508,55	4508,55	4508,55	4508,55	4508,55	4508,55		
8.373,01	8.373,01	8.373,01	8.373,01	8.373,01	8.373,01		
305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38	305.945,38		
30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00		
248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83	248.063,83		
27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56	27.881,56		
0	0	0	0	0	0		
4508,55	4508,55	4508,55	4508,55	4508,55	4508,55		
23.373,01	23.373,01	23.373,01	23.373,01	23.373,01	23.373,01		
0,64993139	0,59626733	0,547034245	0,50186628	0,46042778	0,42241081		
15190,8551	13936,5643	12785,83878	11730,1273	10761,5847	9873,01349		
23373,0135	23373,0135	23373,01349	23373,0135	23373,01349	23373,0135		
100%	110%	120%	130%	140%	150%	160%	170%
82687,94	90956,74	99225,53	107494,32	115763,12	124031,91	132300,71	140569,50
0,00	24145,16	48290,32	72435,49	96580,65	120725,81	144870,97	169016,14

Cuadro 2 Ejemplo con tasa de descuento de 10% anual

Análisis Proyecto Inversión Simple					
DATOS					
Cantidad Unidades Vendidas Q	84971,0093				
Precio Venta Unitario p =	3,70				
Costo Variable Unitario Cv =	3,00				
Costo Fijo Cf =	30000,00				
Inversión I =	150000,00				
Cantidad de Años n =	10				
Tasa Impuesto a las ganancias Tig =	0,35				
Amortización Anual A = I/n	15000,00				
Tasa de Rent. - Descuento (Costo de Oportunidad) r =	0,1				
Intereses Anuales	0				
I) Determinación del Impuesto a las Ganancias:					
	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Ingresos o Ventas por Año (p * Q)		314.392,73	314.392,73	314.392,73	314.392,73
Costos Fijos (Cf)		30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00
Costos Variables (Cv * Q)		254.913,03	254.913,03	254.913,03	254.913,03
BAITA (EBITDA) : Beneficios Antes Int.-Imp.y Amort.		29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71
Amortización Lineal por año		15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00
BAIT (EBIT) : Beneficios Antes Intereses e Impuestos		14.479,71	14.479,71	14.479,71	14.479,71
Intereses		0,00	0,00	0,00	0,00
BAT (EBT) : Beneficios Antes Impuestos		14.479,71	14.479,71	14.479,71	14.479,71
Impuesto a las Ganancias (BAT * Tig)		5067,90	5067,90	5067,90	5067,90
BN : Beneficio o Utilidad Neta		9.411,81	9.411,81	9.411,81	9.411,81
II) Calculo del VAN del Proyecto					
Ingresos o Ventas por Año (p * Q)		314.392,73	314.392,73	314.392,73	314.392,73
Costos Fijos (Cf)		30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00
Costos Variables (Cv * Q)		254.913,03	254.913,03	254.913,03	254.913,03
BAITA (EBITDA) : Beneficios Antes Int. Imp.y Amort.		29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71
Intereses		0,00	0,00	0,00	0,00
BATA (EBTDA) : Beneficios Antes Impuestos y Amort.		29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71
Inversión	-150.000,00	0	0	0	0
Impuesto a las Ganancias		5067,90	5067,90	5067,90	5067,90
FCF = Flujo Neto Operativo (BN + Amortizaciones)	-150.000,00	24.411,81	24.411,81	24.411,81	24.411,81
Factor de Descuento al 9 % anual	1	0,90909091	0,8264463	0,7513148	0,6830135
Valor Presente Correspondiente al Flujo del Año t	-150000,00	22192,5538	20175,0490	18340,9536	16673,5942
VAN = Suma de Todos los Valores Presentes	0,00	-2,183E-11			
Otra Forma de Cálculo del FCF:					
FCF = Flujo Neto Operativo (BN + Amortizaciones)	-150.000,00	24411,8092	24411,809	24411,8092	24411,809
$(1 - Ti) * ((p - Cv) * Q - Cf) + Ti * A$					
Q Punto Muerto Financiero =	82687,94173				
Q Financiero al	50%	60%	70%	80%	90%
Q	41343,97	49612,77	57881,56	66150,35	74419,15
VAN (Q)	-120725,81	-96580,65	-72435,49	-48290,32	-24145,16

Cuadro 2 (cont) Ejemplo con tasa de descuento de 9% anual

Año 5	Año 6	Año 7	Año 8	Año 9	Año 10		
314.392,73	314.392,73	314.392,73	314.392,73	314.392,73	314.392,73		
30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00		
254.913,03	254.913,03	254.913,03	254.913,03	254.913,03	254.913,03		
29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71		
15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00		
14.479,71	14.479,71	14.479,71	14.479,71	14.479,71	14.479,71		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
14.479,71	14.479,71	14.479,71	14.479,71	14.479,71	14.479,71		
5067,90	5067,90	5067,90	5067,90	5067,90	5067,90		
9.411,81	9.411,81	9.411,81	9.411,81	9.411,81	9.411,81		
314.392,73	314.392,73	314.392,73	314.392,73	314.392,73	314.392,73		
30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00	30.000,00		
254.913,03	254.913,03	254.913,03	254.913,03	254.913,03	254.913,03		
29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71	29.479,71		
0	0	0	0	0	0		
5067,90	5067,90	5067,90	5067,90	5067,90	5067,90		
24.411,81	24.411,81	24.411,81	24.411,81	24.411,81	24.411,81		
0,62092132	0,56447393	0,513158118	0,46650738	0,424097618	0,38554329		
15157,8129	13779,8299	12527,11809	11388,2892	10352,99016	9411,80923		
24411,8092	24411,8092	24411,80923	24411,8092	24411,80923	24411,8092		
100%	110%	120%	130%	140%	150%	160%	170%
82687,94	90956,74	99225,53	107494,32	115763,12	124031,91	132300,71	140569,50
0,00	24145,16	48290,32	72435,49	96580,65	120725,81	144870,97	169016,14

Ejemplo 2: Teniendo en cuenta los datos siguientes:

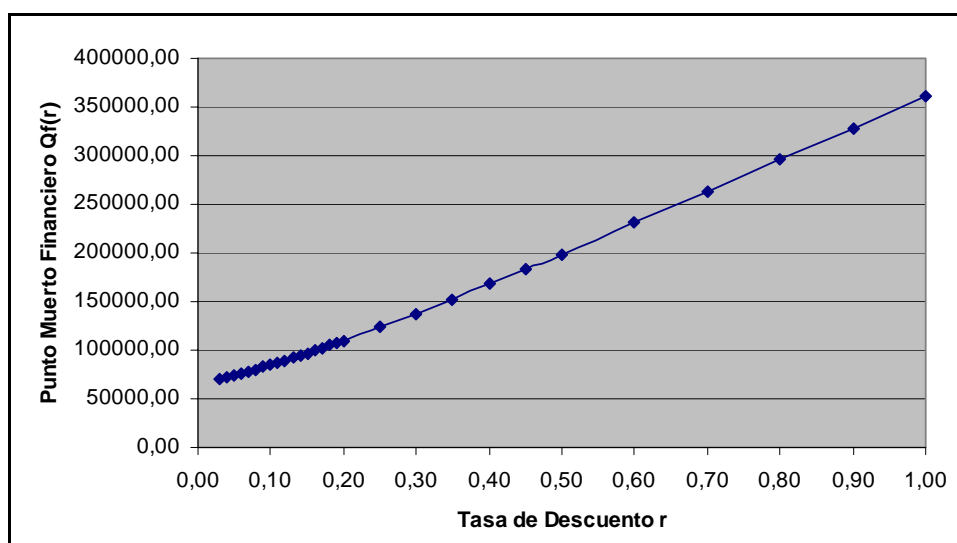
Inversión I	150.000
Cantidad años n	10
Precio venta unitario p	3,70
Costo variable unitario Cv	3,00
Costo fijo anual Cf	30.000
Tasa impuesto ganancias tig	0,35

se obtiene el cuadro 3, que puede visualizarse en la figura 1.

Cuadro 3
Valores del punto muerto financiero
 $Q_f(r)$ vs la tasa de descuento r

Tasa Descuento r	Punto Muerto Financiero $Q_f(r)$
0,03	69966,10
0,04	71964,05
0,05	74012,50
0,06	76110,32
0,07	78256,32
0,08	80449,28
0,09	82687,94
0,10	84971,01
0,11	87297,17
0,12	89665,11
0,13	92073,48
0,14	94520,95
0,15	97006,17
0,16	99527,83
0,17	102084,59
0,18	104675,16
0,19	107298,23
0,20	109952,56
0,25	123650,30
0,30	137954,98
0,35	152742,30
0,40	167908,96
0,45	183371,28
0,50	199062,79
0,60	230936,39
0,70	263238,31
0,80	295795,68
0,90	328506,70
1,00	361311,27

Figura 1 Punto muerto financiero $Q_f(r)$ vs. r

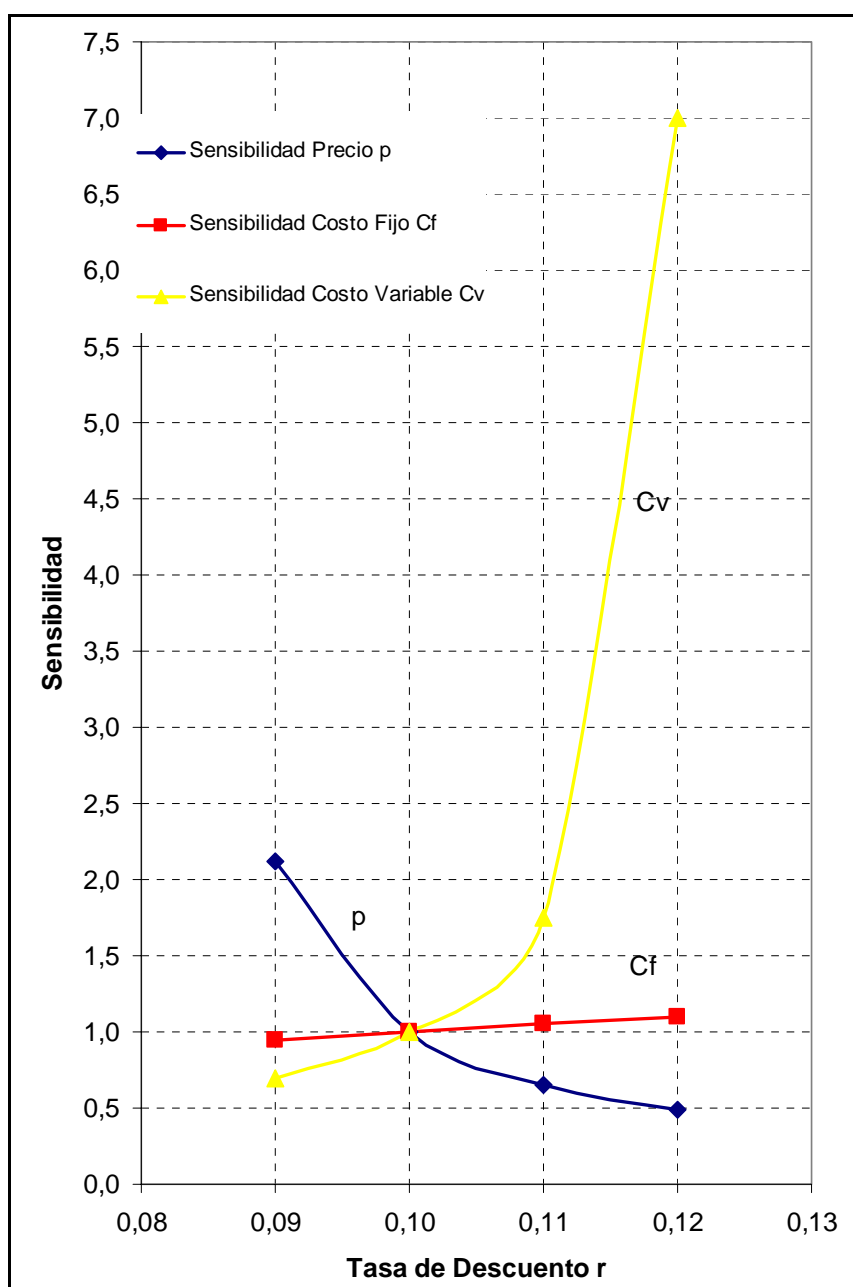


4. Análisis de sensibilidad del proyecto de inversión simple

A continuación se realiza un análisis de sensibilidad del proyecto de inversión simple alrededor de un punto de referencia (se utilizará, como ejemplo, los datos y cálculos obtenidos para el Ejemplo 1 con tasa de descuento $r = 0,10$ anual).

En el cuadro 4 y la figura 2 se realiza el análisis de sensibilidad del punto muerto financiero Q_f respecto de las variables precio unitario p , costo variable unitario C_v y costo fijo anual C_f en función de la tasa de descuento r . Para ello se calculan el punto muerto financiero $Q_f(r)$ correspondientes a las tasas de descuento $r = 0,11 (+10\%)$, $r = 0,12 (+20\%)$ y $r = 0,09 (-10\%)$, y las respectivas modificaciones en la variable en estudio obteniéndose los siguientes resultados.

Figura 2
Ejemplo de análisis de sensibilidad



Cuadro 4 Ejemplo de análisis de sensibilidad**Punto de Referencia**

# Unidades	
Vendas Q	84971,01
Inversión	
Inicial I	150000
# años n	10
Amortización	
Anual A	15000,00
Precio Venta	
Unitario p	3,70
Costo	
Variable	
Unitario Cv	3,00
Costo Fijo	
anual Cf	30000
Tasa	
Impuesto	
Ganancias	
Tig	0,35
Tasa	
Descuento r	0,10

**Tabla de Cálculos de Sensibilidad para
Punto Financiero Respecto Cantidad Q**

	Tasa de Descuento r	Sensibilidad p $Q_f(r,p)/Q_f(r,p=3,70)$	Sensibilidad Cf $Q_f(r,Cf)/Q_f(r,Cf=30000)$	Sensibilidad Cv $Q_f(r,Cv)/Q_f(r,Cv=3)$
-10%	0,09	2,1212	0,9482	0,7000
0%	0,10	1,0000	1,0000	1,0000
+10%	0,11	0,6542	1,0491	1,7500
+20%	0,12	0,4861	1,0956	7,0000

Variaciones Porcentuales para el Punto Muerto Financiero Qf

	Tasa de Descuento r	Sensibilidad p $Q_f(r,p)/Q_f(r,p=3,70)$	Sensibilidad Cf $Q_f(r,Cf)/Q_f(r,Cf=30000)$	Sensibilidad Cv $Q_f(r,Cv)/Q_f(r,Cv=3)$
-10%	0,09	112,12%	-5,18%	-30,00%
0%	0,10	0,00%	0,00%	0,00%
+10%	0,11	-34,58%	4,91%	75,00%
+20%	0,12	-51,39%	9,56%	600,00%

5. Conclusiones

Para un proyecto de inversión simple se ha demostrado que:

- Cuando la tasa de descuento r es despreciable (es decir, cuando r tiende a cero) el Punto Muerto Financiero, para la variable de cantidad Q , tiende al Punto Muerto Contable.
- Cuando la tasa de descuento r es muy grande (es decir, cuando r tiende a infinito) la gráfica de la función Punto Muerto Financiero $Q_f = Q_f(r)$, función estrictamente creciente y convexa en la variable r , tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua dada por la recta de ecuación $y = a + b r$ que tiene pendiente $b > 0$ y ordenada al origen a dados por (9) y (8) respectivamente.
- Cuando se realiza un análisis de sensibilidad respecto del punto muerto financiero, alrededor de un punto de referencia caracterizado por la tasa de descuento $r = 0,10$ anual, se obtiene que las variables costo variable unitario C_v y precio unitario p tienen una influencia apreciable y en cambio la del costo fijo anual C_f es poco apreciable. ■

REFERENCIAS

- Baker, R., and Fox, R. Capital investment appraisal: A new risk premium model, *International Transactions on Operations Research*, 10 (2003), 115-126.
- Brealey, R., and Myers, S., *Fundamentos de financiación empresarial*. Mc Graw- Hill, Madrid, 1993.
- Fernandez Blanco, M. *Dirección financiera de la empresa*. Pirámide, Madrid, 1991.
- Machain, L., *El valor actual neto como criterio óptimo para seleccionar alternativas de inversión*, Trabajo Final de la Especialidad en Finanzas, Univ. Nacional de Rosario, 2002
- Reichelstein, S., Providing managerial incentives: Cash flows versus accrual accounting. *Journal of Accounting Research*, 38 (2000), 243-269.
- Sapag Chain, N., *Evaluación de proyectos de inversión en la empresa*, Prentice Hall, 2001.
- Tarzia, D.A., *El punto muerto financiero de un proyecto de inversión simple en función de la tasa de descuento*, Trabajo Final de la Especialidad en Finanzas, Univ. Nacional de Rosario, 2006.
- Vanhoucke, M., Demeulemeester, E. y Herroelen, W., On maximizing the net present value of a project under renewable resource constraints, *Management Science*, 47 (2001), 1113-1121.
- Villalobos, J.L., *Matemáticas financieras*, Prentice Hall, 2ª Ed, México, 2001.